

I 92658 | 51

Bundesforschungszentrum für Wald, Wien, download unter www.zobodat.at

47

MITTEILUNGEN  
DER FORSTLICHEN BUNDES-VERSUCHSANSTALT  
MARIABRUNN

(früher „Mitteilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“)

51. Heft

November 1955

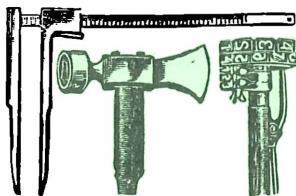
---

INHALT:

Vorwort

Forstliche Ertragselemente  
von Dipl.-Ing. Dr. Robert Hampel

KOMMISSIONSVERLAG  
DER ÖSTERREICHISCHEN STAATSDRUCKEREI, WIEN



#### Neuzeitliche Walddarbeiterwerkzeuge

Hochleistungssägen, Garantiehacken, -sappinen und -rindenschäler, sämtliches Instandsetzungswerkzeug

#### Holzmeß- und -markiergeräte

Meßkluppen, Revolvernumerierschlägel, Signierhämmer, Baumreißer, Försterkreide, Maßbänder aus Leinen und Stahl

#### Neuzeitliche Forstkultureräte

Waldbodenbearbeitungsgeräte, Spatenrollegen, Bodenfräsen, Forstsämaschinen, Verschulapparate, Durchforstungswerkzeuge



#### Spezialunternehmen für die gesamte Forstwirtschaft

Wien VI, Gumpendorfer Str. 16  
Telephon B 26 2 66, A 30 0 82

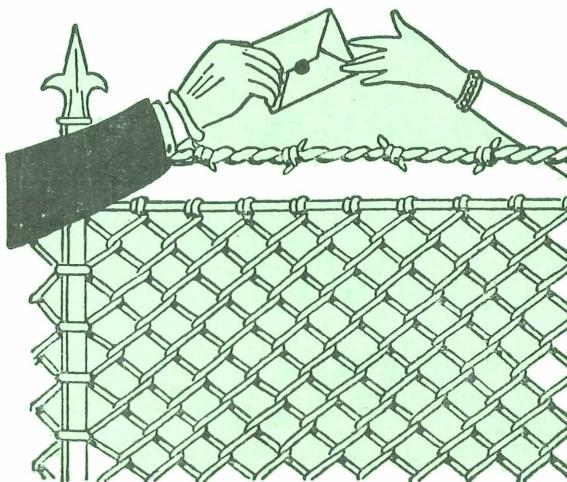
120 Seiten starker Katalog „MBr.“ samt Preisliste sowie Fachbuch:  
„Neuzeitliche Waldbearbeitungswerkzeuge“ auf Anforderung

## JERGITSCH-GITTER und EISENKONSTRUKTIONEN

B 27-0-37

Ges. m. b. H., Wien I, Elisabethstraße 10

B 25-0-69



Einfriedungen  
samt Montagen in  
ganz Österreich

Großtoranlagen  
in jeder Breite und  
Höhe

Schutzzitter  
aller Art

Gewichtsschlosser-  
arbeiten

Garderobeschränke  
aus Vollblech und  
Gitter

Stahlrohrbetten  
Hoch- und Quer-  
klappbetten, auch  
aus beigestellten  
Betteinsätzen

# MITTEILUNGEN DER FORSTLICHEN BUNDES-VERSUCHSANSTALT MARIABRUNN

(früher „Mitteilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Österreichs“)

**51. Heft**

**November 1955**

---

## INHALT:

### Vorwort

Forstliche Ertragselemente  
von Dipl.-Ing. Dr. Robert Hampel

OÖLM LINZ



+XOM3132304

KOMMISSIONSVERLAG  
DER ÖSTERREICHISCHEN STAATSDRUCKEREI, WIEN

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten.

Copyright 1954 by  
Forstliche Bundes-Versuchsanstalt Mariabrunn  
Wien-Hadersdorf.  
Printed in Austria.

I 92658 | 51  
Oberösterreichisches  
Landesmuseum Linz / D.  
Einschub  
Inv. Nr. 252 | 1983

## VORWORT.

Das vorliegende Buch stellt den Versuch dar, Fragen des Zuwachses und Ertrages auf neuen Wegen zu lösen. Die Idee hiezu trage ich schon seit meinen Hochschultagen mit mir, doch ist mir bis heute nicht gelungen, ihre Richtigkeit unangreifbar zu beweisen. Immerhin habe ich in einem Vierteljahrhundert soviel zusammengetragen, daß die Gedanken zu einem geschlossenen Bau vereinigt werden können, dessen schwache Stellen und Lücken ich nirgends zu verbergen versucht habe. Aber auch bei strengster Kritik komme ich immer wieder zur Überzeugung, daß die hier vorgetragenen Gedanken richtig sind und daß ihre Auswertung einen wesentlichen Fortschritt in der Forstwissenschaft bedeuten würde.

Allerdings verhehle ich mir nicht, daß die mathematische Behandlung des Stoffes viele Forstleute von einem tieferen Eindringen abhalten wird und daß somit gerade jene Arbeitsmethode der Verbreitung meiner Gedanken hinderlich sein wird, der ich einen Fortschritt unserer Wissenschaft zu verdanken hoffe. Da aber alle Naturwissenschaften aus dem Übergang von der bloßen Registrierung der Erscheinungen zu ihrer mathematischen Behandlung große Vorteile gezogen haben, liegt meine Vorgangsweise auf dem Wege der normalen Entwicklung und wird sich im Laufe der Zeit wohl auch durchsetzen.

Das Buch leidet an dem Mangel mancher Nachkriegsveröffentlichungen, daß sein Manuskript schon im Jahre 1946 abgeschlossen wurde und daß es seinem Autor infolge beruflicher Überlastung nicht möglich war, es nochmals zu überarbeiten und wenigstens die wichtigste seither erschienene Fachliteratur (Möller, Polster, Weck) zu berücksichtigen. Dadurch würden sich eine Abrundung des Stoffes und weitere Ausblicke, jedoch keine grundlegende Änderung ergeben haben.

Innsbruck, November 1954.

Robert Hampel

## INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
<b>Vorwort</b>	
<b>A. Einleitung</b>	5
<b>B. Theoretischer Teil</b>	7
<b>I. Das Wachstum</b>	8
1. Ableitung der Wachstumsgleichung	8
2. Die Kurvenform . . . . .	14
3. Bedeutung und Einfluß der Konstanten ..	16
4. Deduktive Ableitung der Konstanten	22
5. Wachstumskurven ..	24
6. Zusammenfassung	25
<b>II. Die Stammform</b>	26
1. Ableitung der Stammformgleichung . . . . .	26
2. Vergleich der berechneten mit der tatsächlichen Stammform	36
<b>C. Angewandter Teil</b>	44
<b>I. Anwendung der Schaftformgesetze</b>	44
1. Massenermittlung von Stammabschnitten . . .	44
a) Die Mittenflächenformel (Hubersche Formel) . . . . .	45
b) Andere Formeln zur Messung von Stammabschnitten	69
2. Massenermittlung von Stämmen .	81
a) Ableitung der Formzahlformeln ..	81
b) Genauigkeit der Formzahlformeln	99
c) Vergleich mit Messungen	106
3. Massenermittlung von Beständen	123
a) Ableitung der Formeln	124
b) Auswertung der Formeln .	127
<b>II. Anwendung der Wuchsgesetze</b>	139
1. Aufstellung von Wachstums- und Ertragstafeln	139
a) Ausgleichung der Schaftkurve . . . . .	142
b) Anpassung an normale Wachstumsverhältnisse	144
c) Übertragung auf den Bestand .. . . . .	162
d) Übergang auf andere Wachstumsverhältnisse	168
2. Zusammenfassung	170
<b>D. Geschichtlicher Teil</b>	172
<b>I. Wuchsgesetze..</b>	173
<b>II. Schaftformgesetze.....</b>	174
<b>E. Schluß</b>	184
<b>F. Schrifttum</b>	185

## A. EINLEITUNG.

Je nach den Aufgaben, die den einzelnen Lebewesen im Haushaltspanel der Natur zufallen, ist ihr Bau in den weitesten Grenzen verschieden:

Wegen der Beschränktheit des vorhandenen Raumes stehen sie aber untereinander in einem Kampf um ihre Existenz; in einem Kampf, der ihre ungehemmte Entwicklung behindert, in bestimmte Bahnen leitet und somit auf Einzelheiten der Formausbildung besonderen Einfluß hat.

Aufgabe der grünen Pflanzen ist die Umwandlung anorganischer in organische Substanz. Hiezu bedarf sie eines Assimilationsapparates und entsprechender Einrichtungen für die Versorgung mit Nährlösung und für den Gasaustausch. Die Form, welche diese Einrichtungen im einzelnen erhalten, wird weitgehend durch den Kampf mit anderen Pflanzen bestimmt.

Dieser Kampf ums Dasein äußert sich bei den Pflanzen als Kampf um den Standraum. Durch Anpassung an besonders ungünstige Klima- und Bodenverhältnisse, durch geringen Lichtbedarf, starke Ausbreitungsenergie und ähnliches versuchen sie, ihren Standraum zu vergrößern.

In den Wäldern sind es — vom Jugendstadium abgesehen — die Bäume selbst, die einander den Standraum streitig machen. Insbesondere in reinen und gleichaltrigen Hochwäldern nimmt der Kampf sehr scharfe Formen an, weil für alle Individuen die gleichen Voraussetzungen gelten. Und hier wird auch am leichtesten klar, daß es nicht nur auf die Anpassung an äußere Faktoren wie Boden, Klima und dergleichen ankommt, sondern auch auf die Anpassung der einzelnen Organe an ihren Zweck. Je besser diese Anpassung ist, mit desto geringerem Aufwand wird die Arbeit durchgeführt; oder umgekehrt: es wird bei gleichem Aufwand eine höhere Leistung erzielt.

In diesen Rahmen gehört auch die Verwertung der Assimilate, von denen dem Holzmassenzuwachs besondere Beachtung gebührt. Die Aufgabe des Stammes, in dem die Hauptmasse des erzeugten Holzes vereinigt ist, ist es, die Krone zu tragen und ihr die nötige Nährstoffmenge zuzuleiten. Je besser der Stamm seiner Aufgabe angepaßt ist, d. h. je sparsamer er dimensioniert ist, desto höher kann er mit der gleichen Holzmasse die Krone über den Boden und über die schlechter angepaßten Nachbarstämme heben und umso stärker kann sie sich in dem darüber befindlichen freien Raum ausbreiten. Auch ein ganz geringer Vorteil in dieser Hinsicht ermöglicht einen gesteigerten Massenzuwachs, mithin eine weitere Hebung der Krone und legt dadurch den Grundstock zu einer stets zunehmenden Vergrößerung des Standraumes. Aus diesem Grunde kommt der Schaftform für die Ausweitung des Standraumes besondere Bedeutung zu.

Nun stellen aber Massenzuwachs und Stammform die Elemente des forstlichen Ertrages dar, weil durch sie die Holzmasse und ihr Wert bestimmt werden. Und die Abhängigkeit dieser forstlichen Ertrags-elemente von der Assimilationstätigkeit der Krone bzw. vom Gedanken sparsamster Verwendung der Holzmasse, diese Abhängigkeit soll in dem vorliegenden Buch mathematisch zu fassen versucht und daraufhin geprüft werden, ob ihr jene Tragfähigkeit zukommt, die erforderlich ist, um auf ihr Wachstums- und Ertragsgesetze aufzubauen und diese in der praktischen Forstwirtschaft anzuwenden.

Wenn hier von Gesetzen gesprochen wird, dann bedarf der Inhalt und die Berechtigung dieses Ausdruckes einer kurzen Begründung.

Bis vor kurzem verknüpften wir mit dem Wort Naturgesetz die Vorstellung eines ausnahmslosen Kausalzusammenhangs zwischen zwei Erscheinungen. Erst die moderne Atomphysik hat uns gelehrt, daß auch die Naturgesetze statistischer Natur sind; nur ist im Einzelfalle die Zahl der Elemente so groß, daß praktisch keine Ausnahmen vorkommen. Erst wenn wir uns mit Erscheinungen beschäftigen, an denen etwa nur wenige Molekel beteiligt sind, erhalten wir erhebliche Abweichungen von den bisher für ausnahmslos gültig gehaltenen Gesetzen.

Ähnlich liegen die Dinge bei den Wachstums- und Ertragsgesetzen: auch sie ergeben im Einzelfall erhebliche Abweichungen, gewinnen aber mit zunehmender Zahl der Fälle an Genauigkeit.

Bis zu Wöhlers Harnstoffsynthese herrschte allgemein die Ansicht, daß zwischen organischer und anorganischer Substanz ein grund-

legender Unterschied bestehe. Heute erleben wir, daß über die Virusarten ein Übergang von der leblosen zur lebenden Substanz gefunden sein dürfte und daß die Erscheinung des Lebens und ihre Vielfalt möglicherweise nur an Labilität und verhältnismäßige Seltenheit großer Moleküle geknüpft ist.

Meiner Ansicht nach ist in diesen Erkenntnissen auch die inbegriffen, daß zwischen den Gesetzen der unbelebten und der lebenden Natur kein qualitativer sondern nur ein quantitativer Unterschied besteht und daß er hauptsächlich in der Zahl der beteiligten Elemente liegt. Demnach bestünde eine aufsteigende Reihe zwischen Tätigkeit der Spaltöffnungen als Folge eines physikalischen Gesetzes, Transpiration und Assimilation eines Baumes als Folge der Tätigkeit seiner Spalten, Massenzuwachs eines Bestandes als Folge des Massenzuwachses der einzelnen Stämme, Holzproduktion einer Betriebsklasse und schließlich eines ganzen Landes als Folge des Massenzuwachses eines Bestandes. Der Unterschied in der Genauigkeit der einzelnen Gesetze würde auch hier nur durch die Zahl der Elemente hervorgerufen, wenn man von absichtlichen Vernachlässigungen zur Vereinfachung der Ergebnisse absieht.

Der Ausdruck Wachstums- und Ertragsgesetze hätte demnach in der Forstwissenschaft genau dieselbe Berechtigung wie etwa für physikalische Gesetze, wenngleich ihnen nicht dieselbe Genauigkeit zukommt.

## B. THEORETISCHER TEIL.

Wie schon einleitend bemerkt wurde, sind der Zuwachs und die Stammform für die Größe des Ertrages maßgebend. Hieraus ergibt sich auch für die Gliederung des theoretischen Teiles die gesonderte Betrachtung der Stammform und des Zuwachses. Diese Trennung ist aber auch in der verschiedenen Aufgabe begründet: Während nämlich der Stamm die Krone zu tragen hat, also durch seine Festigkeit wirkt, hat die Krone als Erzeugerin der Assimilate eine physiologische Wirkung.

Beide müssen aufeinander abgestimmt sein, weil die Krone nicht größer sein kann als es die Tragfähigkeit des Stammes zuläßt, während die Stammstärke von der Holzmenge abhängt, die von der Krone erzeugt wird. Den Ausschlag gibt aber zweifellos die Leistungsfähigkeit der Krone.

Aufgabe des theoretischen Teiles ist es nun, die Abhängigkeit der Stammform und der Kronenentwicklung von inneren und äußeren Faktoren zu ermitteln und in mathematische Formeln zu fassen.

## I. DAS WACHSTUM.

### 1. Ableitung der Wachstumsgleichung.

Es hat auch bisher nicht an Versuchen gefehlt, um den Verlauf des Wachstums durch einen analytischen Ausdruck zu erfassen.

Alle diese Bestrebungen können in 2 Gruppen eingeteilt werden, je nachdem, ob den entwickelten Formeln bestimmte Anschauungen über die das Wachstum verursachenden Kräfte zugrunde gelegt wurden oder nicht. Im ersten Falle wird zumeist das Vorhandensein einer Wuchskraft angenommen, der mit der Höhe wachsende Widerstände entgegentreten (Hugershoff, Tischendorf, Urstadt, Weber u. a.), im letzteren Falle wird auf rein mathematischem Weg eine Formel abgeleitet (Lewakovič, Korsuň, Peschel u. a.).

Nun scheint aber die pflanzenphysiologische Forschung solche Fortschritte gemacht zu haben, daß der Versuch gerechtfertigt ist, allein auf sie eine Wachstumsformel aufzubauen und dadurch einen tieferen Einblick in die Wachstumsgesetze zu erhalten.

Hiebei ist für die Richtigkeit der abzuleitenden Formel die Auswahl der das Wachstum bestimmenden Faktoren (Wurzel, Wasserleitung und Blätter) ausschlaggebend. Sie verliert aber wieder an Bedeutung, wenn man bedenkt, daß sich die einzelnen Faktoren aufeinander abstimmen, so daß der im Minimum vorhandene Faktor nicht erst ermittelt werden muß, weil sich ja alle übrigen automatisch auf ihn einstellen.

Zu diesen maßgebenden Wachstumsfaktoren gehört die Größe des Transpirationsstromes, mit der die transpirierende Fläche im Einklang stehen muß.

Wenn auch die Pflanzenphysiologie keine Wuchskraft kennt, so ist doch die Annahme gerechtfertigt, daß eben die Größe des Transpirationsstromes das Maß für jene hypothetische Wuchskraft abgibt. Hierdurch ist der innere Zusammenhang zwischen den eben angeführten Formeln und der hier abgeleiteten hergestellt.

Da es, wenn vielleicht auch nicht die einzige, so doch die Hauptaufgabe des Transpirationsstromes ist, den Blättern die notwendigen

Nährsalze und Wasser zur Assimilation zuzuführen, kann angenommen werden, daß Transpiration und Assimilation parallel gehen.

Schließlich scheint mir auch noch die Annahme gerechtfertigt, daß der Zuwachs an Schaftmasse in einem festen Verhältnis zur Menge der erzeugten Assimilate steht: Massenzuwachs und Transpirationsgröße wären dann einander proportional.

Um zu Zahlenangaben über den Massenzuwachs zu gelangen, ist es notwendig, die Abhängigkeit der Transpiration von äußeren und inneren Einflüssen näher zu untersuchen.

Da sich die Leitungsbahnen der Nährstoffe nicht in den lebenden Baumteilen befinden, kommen als innere Einflüsse nur die Stellen der Wasseraufnahme in den Wurzeln und die der Wasserabgabe in den Blättern in Frage. Wieso es zum Wurzeldruck kommt, ist noch nicht geklärt. Tatsache ist jedenfalls, daß er nur zum geringen Teil beiträgt, den Wasserverbrauch von Bäumen zu decken.

Ausschlaggebend für den Wasserverbrauch ist die Tätigkeit der Spaltöffnungen. Ihre Zahl und Öffnungsduer soll als Maß für die Größe des Transpirationsstromes gelten. Zweifellos wächst diese mit der Länge der Vegetationsperiode: sie wird also in Hochlagen kürzer sein als in der Tiefebene usw. Aus dem gleichen Grund wird auch die Standortsgüte einen Einfluß haben, weil sich Trockenheit in früherem Schließen der Spalten auswirken muß. Die Öffnungsduer der Spalten kann demnach als Produkt der mittleren täglichen Öffnungsduer  $c_1$  und der Länge der Vegetationsperiode  $c_2$  gelten. Erstere wird von der Standortsgüte, letztere vom Klima beeinflußt. Sie wird also auf schlechten Standorten in großen Höhenlagen besonders kurz bemessen sein.

Außerdem haben Untersuchungen von Boysen-Jensen ergeben, daß die tiefer angesetzten Blätter eines Baumes die Spalten länger geöffnet halten als die höher angesetzten. Hierdurch wird die Annahme gestützt, daß die Öffnungsduer der Spalten auch von ihrer Höhe über dem Boden abhängig ist und daß auf diese Weise der wachsende Widerstand der Leitungsbahnen zum Ausdruck kommt (vgl. Tischendorf).

Bezüglich der Art dieser Funktion sind wir noch völlig auf Annahmen angewiesen: Die Spannungen in den Leitungsbahnen wachsen zumindest proportional der Höhe. Da der Schließmechanismus in den Spalten auf diese Spannungen abgestellt ist, wird auch die Öffnungsduer der Spalten — von einem maximalen Anfangswert  $b_1$  an — zumindest proportional der Höhe abnehmen, wenn nicht mit einem

Potenzexponenten m von h, der größer als eins ist. Formelmäßig würde also die Abhängigkeit der Öffnungsduer der Spalten lauten:  $f_1(h) = c_1 \cdot c_2(b_1 - c_3 h^m)$ , wobei m, c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub> und b<sub>1</sub> Konstante sind und letztere die Öffnungsduer bei der Höhe Null angibt.  $m \geq +1$ .

Die mittlere Öffnungsduer aller Spaltöffnungen eines Baumes oder Bestandes ist nun mit ihrer Anzahl zu multiplizieren, um die gesamte Transpirationsmenge zu erhalten. Verwendbare Untersuchungen über die Zahl der Spalten oder zumindest der Blätter liegen trotz zahlreicher Messungen, insbesondere von Burger, nicht vor.

Jedenfalls ist ihre Zahl zunächst gering, steigt beim Bestand mit zunehmender Stammhöhe erst rascher, dann langsamer an und nimmt wahrscheinlich in den höchsten Altersstufen etwas ab. Die Form dieser Kurve wird hauptsächlich von der Erziehung beeinflußt.

Es ist schwierig, auf Grund so unsicherer Angaben eine genügend einfache mathematische Formel für die Zahl der Spalten als Funktion der Höhe zu finden. Am einfachsten ist mit der allgemeinen Parabelgleichung  $y = c_4 x^n$  zu arbeiten, die die gewünschte Form hat, wenn  $0 < n < +1$ . Allerdings steigt diese Kurve dauernd an, so daß in den letzten Altersstufen von vornherein mit Differenzen zu rechnen sein wird. Es wäre dann  $f_2(h) = c_4 h^n$ .

Beim Einzelstamm erfolgt der Anstieg zunächst langsam, mit zunehmender Höhe aber rascher, so daß unter Beibehaltung obiger Gleichung  $n > +1$  sein müßte. Die Abhängigkeit der Transpiration — und damit des Massenzuwachses — von der Höhe ergibt sich als Produkt der beiden Funktionen  $f_1(h)$  und  $f_2(h)$  und lautet daher  $f(h) = = c_1 c_2 (b_1 - c_3 h^m) \cdot c_4 h^n$  oder  $c_1 c_2 c_3 c_4 h^n \left( \frac{b_1}{c_3} - h^m \right)$ . Setzt man  $c_1 c_2 c_3 c_4 = a$

und  $\frac{b_1}{c_3} = b$ , dann erhält man  $f(h) = a h^n (b - h^m)$ . Die Gleichung läßt sich noch weiter vereinfachen, wenn man die Abhängigkeit der Öffnungsduer der Spalten von der Höhe dieser direkt proportional setzt, weil dann  $m = 1$  wird. Sie lautet dann:  $f(h) = ah^n(b-h)$ . f(h) stellt den laufenden Massenzuwachs dar, der wieder als Differential-

quotient der Masse nach der Zeit betrachtet und  $\frac{dM}{dT} = M'$  geschrieben

werden kann. Somit wäre  $M' = ah^n(b-h)$ . Für den Fall  $m = 1$  bedeutet b die größte Höhe, die der Baum erreichen kann, weil für  $b = h_{\max}$  der Zuwachs  $M' = 0$  wird. Die Konstante b kann daher als Kennzeichen für die Standortsgüte verwendet werden.

In der vorstehenden Formableitung wurde absichtlich eine große Anzahl von weniger wichtigen Annahmen und Vernachlässigungen unerwähnt gelassen — z. B. über Atmung, Blatt- und Samenproduktion, Verhältnis von Baumhöhe zur mittleren Höhenlage der Spalten usw. — um den klaren Gedankengang nicht zu verwirren. Überblickt man nämlich den komplizierten physiologischen Ablauf des Wachstums und die Vielfalt der äußereren Einflüsse in ihrer wechselnden Zusammensetzung, dann erscheint es als ein fast aussichtloses Beginnen, wenige maßgebende Verhältnisse herausschälen und mit ihnen eine brauchbare Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse erreichen zu wollen. Betrachtet man aber anderseits den stets gleichartigen Bau von Wachstumskurven, dann festigt sich die Überzeugung, daß sich bei richtiger Auswahl mit Gleichungen, wie der eben abgeleiteten, praktisch brauchbare Ergebnisse erzielen lassen müssen.

Inwieweit dies hier zutrifft, kann nur durch Vergleich mit Ertragstafeln festgestellt werden. Hiezu soll die schon mehrfach für solche Zwecke verwendete Ertragstafel Guttenbergs für die Fichte im Hochgebirge herangezogen werden.

Die Berechnung der Konstanten erfolgte aus den 3 Wertpaaren von  $M'$  und  $h$  für ein Bestandsalter von 35, 65 und 125 Jahren, nach folgenden Formeln:

$$(h_1 h_2)^n \cdot M'_3(h_2 - h_1) + (h_2 h_3)^n M'_1(h_3 - h_2) - (h_1 h_3)^n M'_2(h_3 - h_1) = 0.$$

Hieraus ist  $n$  durch Probieren zu ermitteln.

$$a = \frac{M'_2}{h_2^n(h_1 - h_2)} - \frac{M'_1}{h_1^n(h_1 - h_2)}, \quad a \cdot b = \frac{M'_1 + ah_1^{n+1}}{h_1^n}$$

Die auf diese Weise ermittelten Konstanten sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

**Tabelle 1.**

Standort-klasse	1	2	3	4	5
a	0,07628	0,05439	0,04584	0,03772	0,03467
b	41,066	35,225	30,314	26,00	21,195
n	0,718	0,851	0,903	0,957	0,927

Mit ihrer Hilfe wurden die Werte für  $M'$  berechnet und in den Tabellen 2—6 den Ertragstafelwerten gegenübergestellt.

**Tabelle 2.**

Guttenberg, Fichte im Hochgebirge, 1. Standortklasse.  
 $M' = 0,07628 h^{0,718} (41,066 - h)$ .

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M' \%$
5	0,5	1,9	—	—	—
15	3,2	6,7	5,7	+ 1,0	+ 18
25	7,6	10,9	10,4	+ 0,5	+ 5
35	12,3	13,3	13,3	0	0
45	16,8	14,0	14,1	- 0,1	- 0,7
55	20,9	13,7	13,8	- 0,1	- 0,7
65	24,4	12,6	12,6	0	0
75	27,3	11,2	11,0	+ 0,2	+ 1,8
85	29,8	9,8	9,6	+ 0,2	+ 2,1
95	31,9	8,4	8,1	+ 0,3	+ 3,7
105	33,7	7,0	6,8	+ 0,2	+ 2,9
115	35,2	5,7	5,6	+ 0,1	+ 1,8
125	36,4	4,7	4,7	0	0
135	37,6	3,6	4,0	- 0,4	- 10
145	38,6	2,6	3,3	- 0,7	- 21

**Tabelle 3.**

Guttenberg, Fichte im Hochgebirge, 2. Standortklasse.  
 $M' = 0,05439 h^{0,851} (35,225 - h)$ .

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M' \%$
5	0,4	0,7	—	—	—
15	2,5	3,2	3,5	+ 0,3	+ 9
25	6,0	7,3	6,7	- 0,6	- 9
35	9,7	9,6	9,6	0	0
45	13,4	10,8	11,1	- 0,3	- 3
55	16,9	11,1	11,3	- 0,2	- 2
65	20,0	10,6	10,6	0	0
75	22,8	9,6	9,4	+ 0,2	+ 2
85	25,1	8,5	8,0	+ 0,5	+ 6
95	27,0	7,3	6,7	+ 0,6	+ 9
105	28,7	6,1	5,6	+ 0,5	+ 9
115	30,1	5,0	4,8	+ 0,2	+ 4
125	31,3	4,0	4,0	0	0
135	32,5	2,9	3,4	- 0,5	- 15
145	33,5	1,9	2,8	- 0,9	- 32

**Tabelle 4.**

Guttenberg, Fichte im Hochgebirge, 3. Standortklasse.

$$M' = 0,04584 \text{ h}^{0,903} (30,314-\text{h}).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5	0,3	0,5	—	—	—
15	1,9	2,3	2,4	— 0,1	— 4
25	4,65	4,7	4,2	+ 0,5	+ 12
35	7,6	6,5	6,5	0	0
45	10,7	7,5	7,9	— 0,4	— 5
55	13,6	8,1	8,2	— 0,1	— 1
65	16,2	8,0	8,0	0	0
75	18,5	7,5	7,4	+ 0,1	+ 1
85	20,4	6,9	6,5	+ 0,4	+ 6
95	22,1	6,1	5,7	+ 0,4	+ 7
105	23,6	5,3	5,0	+ 0,3	+ 6
115	25,0	4,4	4,3	+ 0,1	+ 2
125	26,2	3,6	3,6	0	0
135	27,4	2,6	3,0	— 0,4	— 13
145	28,4	1,8	2,5	— 0,7	— 28

**Tabelle 5.**

Guttenberg, Fichte im Hochgebirge, 4. Standortklasse.

$$M' = 0,03772 \text{ h}^{0,957} (26,0-\text{h}).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5	0,3	0,3	—	—	—
15	1,4	1,3	1,4	— 0,1	— 7
25	3,4	2,7	2,6	+ 0,1	+ 4
35	5,6	4,0	4,0	0	0
45	7,9	4,9	5,1	— 0,2	— 4
55	10,6	5,5	5,6	— 0,1	— 1
65	12,2	5,7	5,7	0	0
75	14,0	5,6	5,5	+ 0,1	+ 1
85	15,7	5,4	5,1	+ 0,3	+ 6
95	17,2	5,0	4,7	+ 0,3	+ 6
105	18,7	4,5	4,2	+ 0,3	+ 7
115	20,1	3,9	3,8	+ 0,1	+ 3
125	21,3	3,3	3,3	0	0
135	22,5	2,6	2,8	— 0,2	— 7
145	23,5	1,9	2,4	— 0,5	— 21

**Tabelle 6.**

Guttenberg, Fichte im Hochgebirge, 5. Standortklasse.

$$M' = 0,03467 h^{0,927} (21,195 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5					
15					
25	2,0	1,3	1,3	0	0
35	3,6	2,0	2,0	0	0
45	5,2	2,6	2,6	0	0
55	6,9	3,0	3,0	0	0
65	8,5	3,2	3,2	0	0
75	9,9	3,3	3,3	0	0
85	11,3	3,3	3,3	0	0
95	12,5	3,1	3,1	0	0
105	13,7	2,9	2,9	0	0
115	14,7	2,7	2,7	0	0
125	15,6	2,5	2,4	+ 0,1	+ 4
135	16,5	2,2	2,2	0	0
145	17,3	1,9	2,0	- 0,1	- 5

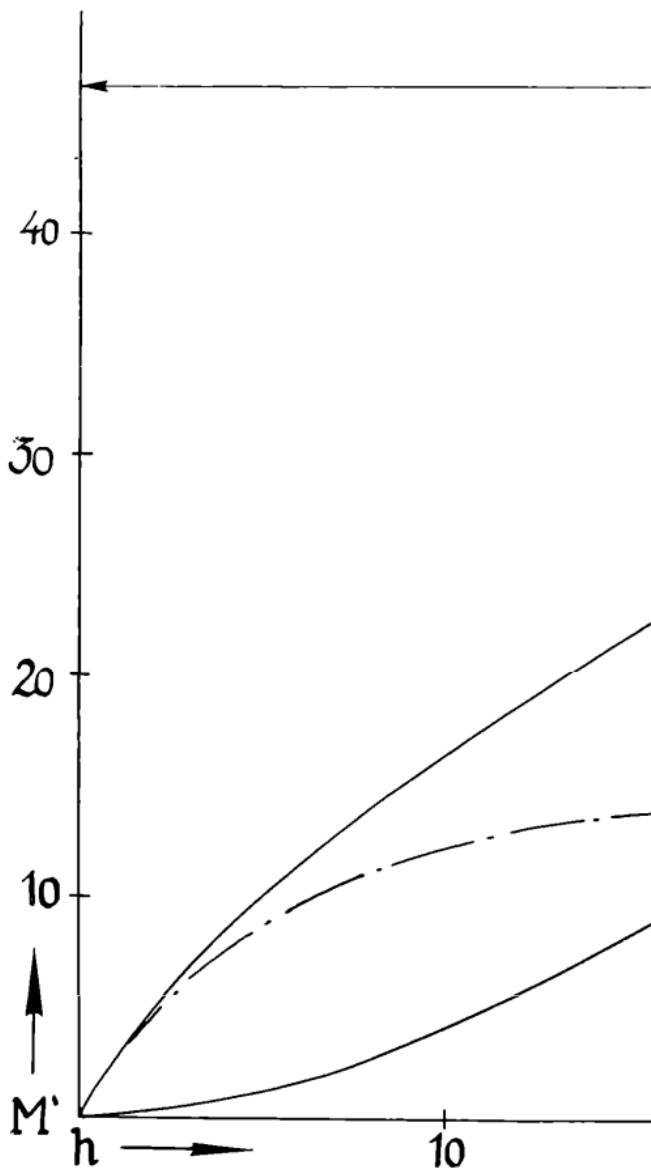
Die Differenzen halten sich zwischen 30 und 130 Jahren durchaus in ertraglichen Grenzen; in den jüngsten Altersstufen sind stärkere Abweichungen belanglos, in den höchsten treten teilweise prinzipielle Fehler auf, über die noch zu sprechen sein wird. Jedenfalls sind die Abweichungen so gering, daß es sich lohnt, über die Form der Kurve, sowie über den Einfluß und die Bedeutung der Konstanten genauere Untersuchungen anzustellen.

## 2. Die Kurvenform.

Die vereinfachte Zuwachsgleichung  $M' = ah^n (b-h)$  geht durch Ausmultiplizieren in die Form  $M' = abh^n - ah^{n+1}$  über.  $M'$  entsteht also als Differenz zweier allgemeiner Parabeln. Da  $n$  stets kleiner als +1 ist, liegt  $n+1$  zwischen +1 und +2. Die beiden Kurven haben daher nebenstehende Form.

Die Lage des Maximums ergibt sich aus

$$\frac{dM'}{dh} = abnh^{n-1} - a(n+1)h^n = 0 \quad \text{mit } h = \frac{bn}{n-1}.$$
 Da  $n$  zwischen 0,7 und 1,0 liegt, schwankt die Lage des Maximums zwischen 0,4 und 0,5  $b$ . Da  $b$  der größten erreichbaren Baumhöhe entspricht, wird der maximale Zuwachs vor der Hälfte dieses Größtwertes erreicht. Seine Lage ist nur von  $n$ , also von der Erziehung des Bestandes abhängig.



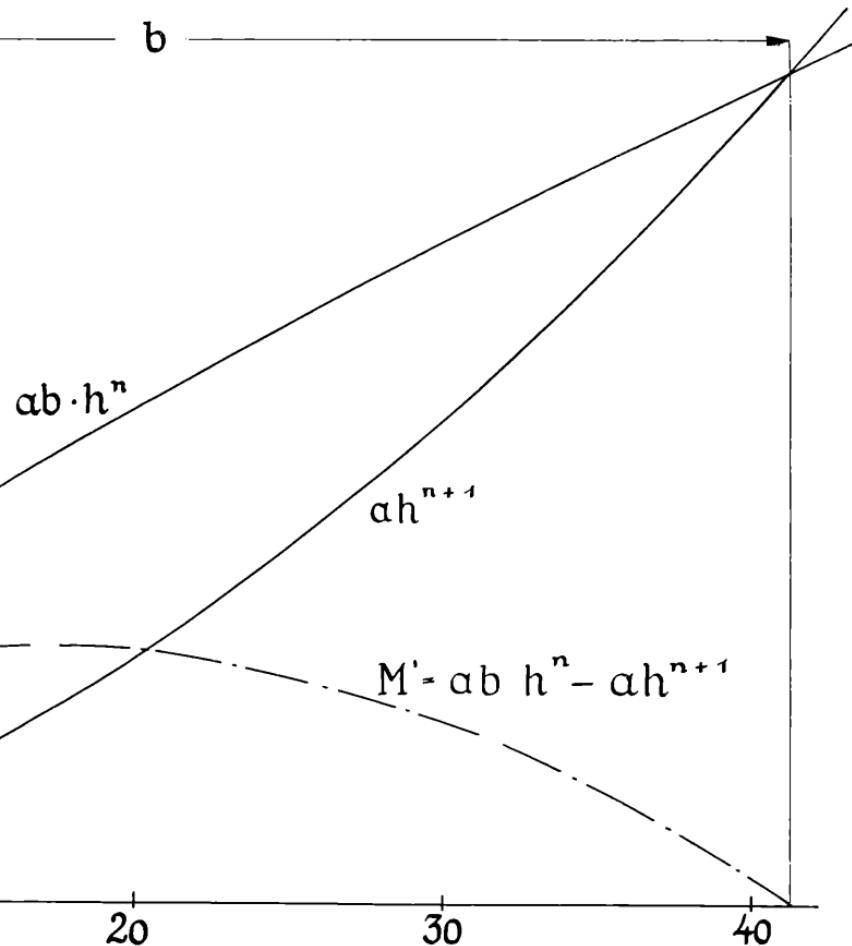


Fig. 1.

Wendetangente ist im verwendeten Kurventeil keine vorhanden:  $\frac{d_2 M'}{dh_2} = abn(n-1)h^{n-2} - a(n+1)nh^{n-1} = 0$ ;  $h_w = b \frac{n-1}{n+1}$ . Da  $n$  stets kleiner als +1 ist, wird  $n-1$  immer negativ, so daß die Wendetangente erst im nicht benützten negativen Kurventeil auftritt. An dieser Lage der Wendetangente ändert sich, wie leicht nachweisbar, auch dann nichts, wenn die Zuwachsgleichung in der ursprünglichen Form  $M' = ah^n (b-h^m)$  verwendet wird.

Die Zuwachsgleichung läßt noch eine weitere Vereinfachung zu, wenn man ihre Geltung auf die Zeit des vollen Bestandesschlusses beschränkt. Für diese Zeit kann man nämlich die Zahl der Spaltöffnungen konstant annehmen, statt zunehmend mit  $h^n$ . Die Gleichung vereinfacht sich dann in  $M' = a_1 - b_1 h$ , was den Ansätzen von Tischendorfs Ableitung entspricht; allerdings mit dem Unterschied, daß es sich bei Tischendorf um den Höhenzuwachs, hier aber um den Massenzuwachs als Funktion der Höhe handelt. Die Zahl der Spaltöffnungen und die Wuchskraft gingen auch in diesem Falle parallel.

### 3. Bedeutung und Einfluß der Konstanten.

Wenn auch durch das Zutreffen der abgeleiteten Wachstumsgleichung kein schlüssiger Beweis für die Richtigkeit ihres physiologischen Unterbaues gegeben ist, so wird er doch umso wahrscheinlicher gemacht, je mehr auch in den Einzelheiten Übereinstimmung erzielt wird.

#### Konstante a.

Die Konstante  $a$  ist aus dem Produkte  $c_1 c_2 c_3 c_4$  entstanden, wobei  $c_1$  die Länge der mittleren täglichen Öffnungsdauer und  $c_2$  die Länge der Vegetationsperiode kennzeichnet, während  $c_3$  und  $c_4$  keine physiologische Bedeutung haben, sondern nur zur Angleichung der Funktion  $f_2(h)$  an  $f_1(h)$ , bzw. von  $h$  an  $b_1$  dienen. Wenn nun  $c_3 c_4$  ziemlich konstant wäre, dann könnte  $\frac{a}{c_3 c_4} = c_1 c_2$  als Charakteristik für die Öffnungsdauer der Spalten gelten. Die Ertragstafeln von Guttenberg: Fichte in Weitra (700—1000 m Seehöhe) — im Hochgebirge (1000—1500 m Seehöhe) — in Paneveggio (1600—1800 m Seehöhe) bilden eine Reihe mit abnehmender Öffnungsdauer, an der sich das Verhalten der Konstanten  $a$  studieren läßt.

In der Tabelle 7 sind die Werte der Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $n$  für die Fichte in Weitra und in Paneveggio in gleicher Weise zusammengestellt wie in Tabelle 1 für die Fichte im Hochgebirge.

**Tabelle 7.**

Standort-klasse	Weitra				Paneveggio		
	1	2	3	4	beste	mittel	schlechte
a	0,07711	0,05150	0,04375	0,03616	0,03118	0,02930	0,02505
b	38,35	33,46	29,14	23,67	37,90	31,63	26,19
n	0,780	0,933	0,990	1,070	0,940	0,956	0,958

Der Vergleich der mit Hilfe dieser Konstanten berechneten und der Wert Guttenbergs ist in den Tabellen 8—14 dargestellt. Auch sie ergeben eine befriedigende Übereinstimmung.

**Tabelle 8.**

Guttenberg, Weitra, 1. Standortklasse.

$$M' = 0,07711 h^{0,780} (38,352 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	ΔM'	ΔM'%
5	0,9	2,6	2,4	+ 0,2	+ 8
15	4,1	8,0	8,2	- 0,2	- 2
25	9,7	13,0	13,0	0	0
35	15,1	14,7	14,3	+ 0,4	+ 3
45	19,9	14,6	14,4	+ 0,2	+ 1
55	24,0	13,2	13,2	0	0
65	27,2	11,3	11,4	- 0,1	- 1
75	29,7	9,4	9,4	0	0
85	31,7	7,6	7,6	0	0
95	33,4	5,9	6,1	- 0,2	- 3

**Tabelle 9.**

Guttenberg, Weitra, 2. Standortklasse.

$$M' = 0,05150 h^{0,933} (33,458 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	ΔM'	ΔM'%
5	0,8	1,4	1,8	- 0,4	- 22
15	3,5	5,0	5,8	- 0,8	- 14
25	8,4	9,4	9,4	0	0
35	13,1	11,5	11,3	+ 0,2	+ 2
45	17,5	11,8	11,6	+ 0,2	+ 2
55	21,1	11,0	11,0	0	0
65	23,9	9,5	9,5	0	0
75	26,2	7,9	8,0	- 0,1	- 1
85	28,0	6,4	6,4	0	0
95	29,4	4,9	5,2	- 0,2	- 4

**Tabelle 10.**  
**Guttenberg, Weitra, 3. Standortklasse.**  
 $M' = 0,043751 \text{ h}^{0,990}$  (29,143—h).

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5	0,6	0,8	1,3	— 0,5	— 39
15	3,2	3,6	3,9	— 0,3	— 8
25	7,4	6,9	6,9	0	0
35	11,6	8,6	8,6	0	0
45	15,3	9,0	8,8	+ 0,2	+ 2
55	18,4	8,4	8,4	0	0
65	20,9	7,3	7,3	0	0
75	22,8	6,1	6,1	0	0
85	24,4	4,9	4,9	0	0
95	25,5	3,9	3,8	+ 0,1	+ 3

**Tabelle 11.**  
**Guttenberg, Weitra, 4. Standortklasse.**  
 $M' = 0,036159 \text{ h}^{1,070}$  (23,666—h).

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5	0,5	0,4	0,9	— 0,5	— 56
15	2,7	2,2	2,7	— 0,5	— 18
25	6,3	4,5	4,5	0	0
35	9,9	5,8	5,7	+ 0,1	+ 2
45	13,0	6,0	6,0	0	0
55	15,5	5,5	5,6	— 0,1	+ 2
65	17,4	4,8	4,9	— 0,1	— 2
75	18,9	4,0	4,0	0	0
85	20,1	3,2	3,2	0	0
95	20,9	2,6	2,5	+ 0,1	+ 4

**Tabelle 12.**

Guttenberg, Paneveggio, bester Standort.

$$M' = 0,031179 h^{0,94} (37,946 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5	0,3	0,4	—	—	—
15	1,6	1,8	2,4	— 0,6	— 25
25	4,2	4,1	4,2	— 0,1	— 2
35	7,3	6,2	6,2	0	0
45	10,7	7,9	8,1	— 0,2	— 2
55	14,0	8,9	9,2	— 0,3	— 3
65	17,2	9,4	9,4	0	0
75	20,1	9,3	9,3	0	0
85	22,7	8,9	8,8	+ 0,1	+ 1
95	25,1	8,2	8,0	+ 0,2	+ 2
115	28,9	6,7	6,5	+ 0,2	+ 3
135	31,8	5,0	5,0	0	0
155	34,2	3,2	3,9	— 0,7	— 18
175	36,3	1,5	3,3	— 1,8	— 55
195	37,3	0,6	3,0	— 2,4	— 80

**Tabelle 13.**

Guttenberg, Paneveggio, mittlerer Standort.

$$M' = 0,0293 h^{0,958} (31,633 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5			1,2		
15	3,0	2,4	2,4	0	0
25	5,3	3,8	3,8	0	0
45	7,7	5,0	5,0	0	0
55	10,2	5,8	5,9	— 0,1	— 2
65	12,7	6,3	6,3	0	0
75	15,0	6,5	6,4	+ 0,1	+ 2
85	17,1	6,5	6,3	+ 0,2	+ 3
95	19,1	6,2	6,1	+ 0,1	+ 2
115	22,5	5,3	5,2	+ 0,1	+ 2
135	25,1	4,2	4,2	0	0
155	27,4	3,0	3,4	— 0,4	— 12
175	29,4	1,7	3,0	— 1,3	— 43
195	31,3	0,3	2,7	— 2,4	— 89

**Tabelle 14.**

Guttenberg, Paneveggio, geringer Standort.

$$M' = 0,02505 h^{0,958} \quad (26,194 - h).$$

T	h	M'ber.	M'gem.	$\Delta M'$	$\Delta M'\%$
5					
15					
25	1,8	1,1	1,1	0	0
35	3,3	1,8	1,8	0	0
45	5,0	2,5	2,5	0	0
55	6,8	3,1	3,1	0	0
65	8,8	3,5	3,5	0	0
75	10,6	3,8	3,8	0	0
85	12,3	3,9	3,9	0	0
95	13,8	3,8	3,9	— 0,1	— 2
115	16,5	3,6	3,6	0	0
135	18,7	3,1	3,1	0	0
155	20,6	2,6	2,6	0	0
175	22,4	1,9	2,2	— 0,3	— 14
195	23,7	1,3	2,0	— 0,7	— 35

Vergleicht man nun die einzelnen Werte der Konstanten a miteinander, dann ist die erwartete Abnahme mit abnehmender Standortsgüte sofort ersichtlich. Dagegen ist die Abnahme mit zunehmender Höhenlage nicht so ausgeprägt. Verwendet man zur genaueren Festlegung die Konstante b als Weiser für die Standortsgüte, dann ergibt sich, daß zwar auf den besten Standorten der 3 Ertragstafeln die Werte für a mit zunehmender Höhenlage abnehmen und daß sie für die Fichte in Paneveggio (1600—1800 m Seehöhe) wesentlich unter den Werten der beiden anderen Ertragstafeln liegen, daß aber die 2.—4. Bonität der Fichte in Weitra und die 2.—5. Bonität der Fichte im Hochgebirge keine Unterschiede aufweisen. Es ist zwar möglich, daß sich das rauhe Klima von Weitra trotz der Höhenlage von 700—100 m mit dem des Hochgebirges von 1200—1500 m hinsichtlich der Vegetationsdauer ausgleicht, aber durchaus nicht erwiesen.

Im allgemeinen scheint es, als ob die Konstante a — von den besten Standorten und extremen Höhenlagen abgesehen — nur von der Standortsgüte abhängig wäre. Zur Klärung dieser Frage müßten aber noch andere Fichtenertragstafeln herangezogen werden.

Die Konstante a beeinflußt den Verlauf der Zuwachskurve in einfacher Weise durch lineare Vergrößerung der Werte für M'. Nach der abgegebenen physiologischen Erklärung würde das bedeuten: Verdopplung der Vegetationsdauer bewirkt bei gleicher Höhe und gleichem Standort doppelten Zuwachs.

### Konstante b.

Wie schon erwähnt, kann die Konstante b zur Charakterisierung der Standortsgüte verwendet werden, natürlich nur in dem Maße, als die Höhe hiezu geeignet ist. Letzteres kommt besonders in den letzten Altersstufen der Ertragstafeln „Fichte im Hochgebirge“ und „Paneggio“ zum Ausdruck. Diese Bestände weisen infolge von Lichtungen eine Unstetigkeit in der Entwicklung auf, die sich darin äußert, daß das Hinaufrücken des Kronenansatzes verlangsamt wird, während der Höhenzuwachs zumindest gleich groß bleibt. Die mittlere Höhe, bis zu der der Transpirationsstrom steigen muß, um die Blätter zu versorgen, wird also gegen das bis dahin übliche Verhältnis zur Bestandsmittelhöhe etwas zurückbleiben. Da wir aber mit der Bestandsmittelhöhe rechnen, ergibt sich dem Kurvenlauf entsprechend ein etwas kleinerer Wert für M' als der Messung entspricht; es ist nicht möglich, eine praktisch verwertbare Kurvengleichung zu finden, die solchen Unstetigkeiten zu folgen vermöchte.

Übrigens treten die Differenzen dadurch verstärkt in Erscheinung, daß es sich um Bestandsmittelhöhen handelt, die in der Nähe der Grenzhöhe b liegen. Vermindert sich nämlich die mittlere Transporthöhe von  $h = 29\text{ m}$  auf  $28\text{ m}$ , bei einer Grenzhöhe  $b = 30\text{ m}$ , dann steigt die Differenz  $b - h$  schon auf den doppelten Betrag, da  $b - h$  einmal 1,0, das andere Mal 2,0 ist.

Durch diese Erscheinung dürften auch jene Differenzen überlagert werden, die durch das Nichtübereinstimmen der transpirierenden Fläche mit der hiefür angenommenen Formel  $ch^n$  erwartet wurden.

Der Einfluß von b auf den Kurvenverlauf ist außerordentlich groß: nicht nur, daß die Kurve entsprechend der größeren Grenzhöhe verlängert wird, auch die Höchstwerte für den Massenzuwachs steigen beinahe mit dem Quadrat von b an. Die Wirkung der — in gewissem Grade beeinflußbaren — Standortsgüte ist somit stärker als die der vorgegebenen Vegetationsdauer.

### Konstante n.

Mit  $c_4h^n$  wurde die Erziehung des Bestandes gekennzeichnet, wobei festzuhalten ist, daß es sich nur um eine geschätzte Entwicklungsform handelt.

Würde die Blattzahl vom früheren Jugendstadium an konstant gehalten, etwa durch dichte Saat und darauffolgende sorgfältige Bestandspflege, dann müßte  $n = 0$  sein. Die Kurve nähme dann die

Form a(b—h) an, was einer Geraden entspricht, die von einem Höchstwert bei  $h = 0$  an gegen die h-Achse fällt und für  $h = b$  den Nullwert erreicht. Diese Form wäre das eine Extrem. Das andere läge in einer so weitständigen Pflanzung, daß sich die einzelnen Bäume gegenseitig gar nicht beeinflussen. Wenn sich der Baum in allen seinen Teilen linear vergrößert, dann könnte die Zunahme mit der dritten Potenz der Höhe erfolgen. Somit  $n = 3$ .

Zwischen diesen beiden Extremen liegen auch die praktisch vor kommenden Werte von  $n$ . Sie schwanken, wie aus dem Vergleich mit den Ertragstafeln hervorgeht, zwischen 0,7 und 1,0.

Der Einfluß von  $n$  auf den Kurvenverlauf beruht auf der Verschiebung des Maximums, sowohl hinsichtlich seiner Größe als auch hinsichtlich seiner Lage, auf der h-Achse. Der erste Fall, die Änderung des absoluten Wertes von  $M'$  hat keine praktische Bedeutung, denn sie kann jederzeit durch eine gegenteilige Änderung von  $c_4$  ausgeglichen werden. Das sieht man aber der Kurvengleichung nicht an, weil  $c_4$  mit den anderen Konstanten zu  $a$  zusammengefaßt wurde.

Der Einfluß von  $n$  hinsichtlich der Lage des Maximums auf der h-Achse ist dagegen am Kurvenverlauf deutlich bemerkbar. Die Lage des Maximums verschiebt sich von  $h = 0$  für  $n = 0$  auf  $h = \frac{3}{4}$  der Grenzhöhe für  $n = 3$ . Für die praktisch in Frage kommenden Werte von  $n$  liegt sie zwischen 0,4 und 0,5 b.

#### 4. Deduktive Ableitung der Konstanten.

Wenn ein längeres Stück der Zuwachskurve bekannt ist, lassen sich, wie gezeigt, die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $n$  daraus mit großer Sicherheit errechnen. Je kürzer das Kurvenstück ist, desto unsicherer werden aber die Berechnungen. Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn die Messungen zwar über die ganze Kurvenlänge verteilt, aber in so geringer Zahl vorhanden sind, daß aus ihnen der Verlauf der Kurve nur in großen Zügen festgestellt werden kann.

Solche Fälle kommen bei der Übertragung von Ertragstafeln auf Wuchsgebiete mit anderem Klima oder anderer Erziehungsform vor.

Es wäre aber überhaupt für die Aufstellung von Ertragstafeln vorteilhaft, wenn die Möglichkeit bestünde, die Konstanten aus Angaben über Klima, Bodenbeschaffenheit und Erziehungsart direkt zu ermitteln. Bei genügender Genauigkeit einer solchen Methode ist es sogar denkbar, daß auf diesem Wege der laufende Massenzuwachs eines Bestandes ermittelt werden kann.

Wenn sich der Massenzuwachs durch das Produkt: Zahl ( $h^n$ ) mal Öffnungsduer (a) der Spalten  $\times$  Höhenreduktion ( $b-h$ ) ausdrücken läßt, dann wäre folgender Weg der direkten Ermittlung gangbar:

1. Zahl der Spalten.

- a) Die Blattmasse wird aus Erhebungen über den Kroneninhalt abgeleitet und als Funktion der mittleren Bestandeshöhe dargestellt. Ihr soll die Zahl der Spalten proportional sein.
- b) Es soll der Lichtgenuß eines Bestandes — im Sinne Wiesners — erhoben und als Funktion der Höhe dargestellt werden. Die Zahl der Spaltöffnungen sei ihm direkt proportional.

2. Öffnungsduer der Spalten. Hier wäre zunächst der tägliche und jährliche Gang der Öffnungsduer in Abhängigkeit von Klima, Bodenbeschaffenheit und Höhe der Spalten über dem Boden festzustellen. Hieraus lassen sich dann Angaben für die durchschnittliche Öffnungsduer verschiedener Bestände machen und mit der Konstanten a in Beziehung bringen.

Es hängt von den Ergebnissen dieser Messungen ab, ob es möglich ist, die Konstante a für einen konkreten Fall etwa aus dem Klima und einer charakteristischen Messung zu ermitteln oder ob sie zur Gänze aus Tabellen entnommen werden muß. Es ist klar, daß die Anwendung von Tabellen eine starke Verringerung der Genauigkeit für den Einzelfall mit sich bringt.

3. Höhenreduktion. Die Konstante b ist ein Kennzeichen der Standortsgüte. Ihr haften somit alle Mängel an, die mit der Bonifizierung nach der Höhe verbunden sind. Insbesondere wirkt sich der Einfluß der Bestandeserziehung auf b aus. Wenn hierauf aber Rücksicht genommen wird, läßt sich b aus einem genügend langen Kurvenstück verlässlich ermitteln.

Die mittlere Höhenlage der Spaltöffnungen über dem Boden wurde beim Vergleich mit den Ertragstafeln von Guttenberg proportional der Bestandesmittelhöhe angenommen. Es darf somit erwartet werden, daß bei direkter Erhebung dieses Wertes noch bessere Ergebnisse erzielt werden.

Bei der Ermittlung von  $b-h$  für einen Einzelfall werden sich die Fehler beider Werte umso stärker geltend machen, je größer  $h$  wird. Insbesondere hierin liegt der Grund, weshalb die Aussichten für die Ermittlung des laufenden Zuwachses eines konkreten Bestandes aus dem Produkt: Lichtgenuß  $\times$  Öffnungsduer der Spalten  $\times$  Höhenreduktion skeptisch beurteilt werden müssen.

## 5. Wachstumskurven.

Wenn man aus den Zuwachswerten die Wachstumswerte ableiten will, braucht man nur die laufenden Zuwächse Jahr für Jahr zu addieren. Liegen die Werte als Kurve vor, dann muß man die zwischen der Kurve und Zeitachse liegende Fläche messen; ist die Kurvengleichung bekannt, dann erhält man durch Integration nach der Zeit die Wachstumsgleichung. Nun lautet in unserem Fall die Zuwachs-

$$\text{gleichung } M' = ah^n(b-h) = \frac{dM}{dT}.$$

Da  $h$ , zumindest als Gleichung, nicht als Funktion der Zeit  $T$  bekannt ist, läßt sich in dieser Form kein Integral bilden. Aussicht auf Erfolg besteht nur noch, wenn  $M$  als Funktion von  $h$  bekannt ist. Diese Beziehung wurde unter Zugrundelegung der Metzgerschen Schriftformhypothese auf S. 130 abgeleitet. Sie lautet  $M = a_1 h^{m_1}$ , wobei  $a_1$  und  $m_1$  Konstante sind. Mit ihrer Hilfe läßt sich  $M' = cM^{m_2} - dM^{m_3}$  berechnen. Um die Integration durchführen zu können, muß nun allerdings die Masse als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, was aber praktisch ohne Bedeutung ist.

$$M' = \frac{dM}{dT} = ch^{m_2} - dh^{m_3}; \quad \frac{dT}{dM} = \frac{1}{ch^{m_2} - dh^{m_3}}; \quad T = \int dT = \int \frac{dM}{ch^{m_2} - dh^{m_3}}$$

Leider ist es mir nicht gelungen, ein verwertbares Integral zu errechnen.

Um trotzdem zu Zahlenwerten für  $T$  zu gelangen, muß man sich derselben Methode bedienen, als wenn die Gleichung  $M' = f(M)$  unbekannt wäre und der funktionelle Zusammenhang nur als Kurve vorläge, nämlich der Summierung endlicher Differenzen auf Grund folgender Überlegung:

$$M' = \frac{dM}{dT} = f(M), \quad \frac{dT}{dM} = \frac{1}{f(M)}, \quad \int dT = \int \frac{dM}{f(M)} = T, \quad T = \sum \frac{\Delta M}{f(M)}.$$

Um diese Berechnung durchzuführen, ist also nur nötig, die reziproken Werte des Massenzuwachses über der zugehörigen Masse aufzutragen und die zwischen den Achsen und der Kurve liegende Fläche zu planimetrieren.

Auf rein rechnerischem Weg gelangt man nahezu zu demselben Ergebnis, wenn man im Sinne der vorzitierten Ableitung  $M' = cM^{m_2} - dM^{m_3} = f(M)$  berechnet,  $\frac{1}{f(M)}$  bildet und die Fläche durch Summierung von Trapezen mit der Breite  $\Delta M$  berechnet.

Für Guttenbergs Fichte im Hochgebirge, 1. Standortsklasse, ergäben sich folgende Zahlenwerte, wobei allerdings für das Jugendstadium die tatsächlichen Werte Verwendung fanden.

**Tabelle 15.**

$$M' = 0,0086992 \cdot M^{0,49895} (141,25 - M^{0,68349}).$$

M	M'	$\frac{1}{M'}$	$\frac{\Delta M}{M'}$	Tber.	Tgem.	$\Delta T$	$\Delta T\%$
bis 100				(17)	24		
200	12,7	0,079	15,8	39	39	0	0
400	14,0	0,071	14,2	54	54	0	0
600	13,1	0,076	15,2	69	68	+ 1	+ 1
800	9,9	0,101	20,2	89	87	+ 2	+ 2
1000	8,0	0,125	25,0	114	115	- 1	- 1
1200	2,8	0,357	71,4	185			
1398	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$			

## 6. Zusammenfassung.

Der laufende Massenzuwachs eines Baumes oder Bestandes wird als Funktion des vorhandenen Blattvermögens, insbesondere der Zahl und Öffnungsduer der Spaltöffnungen betrachtet. Für die Ertragstafeln von Guttenberg hat die Gleichung  $M' = ah^n(b-h)$  gute Übereinstimmung mit den tatsächlichen Werten ergeben. Hierbei haben die Konstanten folgende Bedeutung: a charakterisiert die mittlere jährliche Öffnungsduer der Spalten, ist also im wesentlichen von Klima und Standortsgüte abhängig, b bedeutet die erreichbare Grenzhöhe, hängt der Hauptsache nach von der Standortsgüte, weniger von der Erziehungsart ab, n kennzeichnet die Erziehungsart (Kronenentwicklung) des Bestandes.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Zuwachshypothese besteht darin, daß es für die Stoffproduktion nicht allein auf die Menge der vorhandenen Assimilationsorgane ankommt, sondern auch auf ihre Höhe über dem Boden. Tiefer am Stamm angesetzte Blätter erzeugen unter sonst gleichen Verhältnissen wesentlich mehr Zuwachs als höher angesetzte.

Damit würde eine weitständige Bestandserziehung befürwortet — soweit es eben wirtschaftliche und waldbauliche Verhältnisse gestatten.

Das Zurückgehen auf die physiologischen Grundlagen würde sicherlich eine verlässlichere Festlegung der Wachstumskurven gestatten, als dies mit den bisherigen Methoden möglich war, weil mancher „unvermeidliche Beobachtungsfehler“ als Einfluß von Klima oder Kronenbeschaffenheit erkannt und daher ausgeschaltet werden könnte.

Die Anwendung der Zuwachshypothese auf die Aufstellung von Ertragstafeln ist jedoch nicht an das Zutreffen der Gleichung  $M' = ah^n(b-h)$  gebunden. Es genügt, daß die Form  $M' = a \cdot f(h) \cdot (b-h)$  zutrifft und daß  $f(h)$  punktweise bekannt ist.

Wenn einmal der Einfluß von Klima und Boden auf die Konstanten  $a$  und  $b$  zahlenmäßig bekannt ist, besteht endlich die Möglichkeit, Wachstums- und Ertragstafeln auf deduktivem Weg, mit einem Mindestmaß an Beobachtungen, geänderten Verhältnissen anzupassen und den Wald zu einem fügsameren Instrument in der Hand des Wirtschaftsführers zu machen.

Insbesondere wird es durch Zusammenfassung dieser Zuwachshypothese und der Metzgerschen Schaftformhypothese möglich, einen tiefen Einblick in die Form- und Wachstumsverhältnisse des Normalstammes und des Normalwaldes zu erhalten und die Ertragslehre in dem festen Boden der Pflanzenphysiologie zu verankern.

## II. Die Stammform.

### 1. Ableitung der Stammformgleichung.

Der Gedanke, die Stammform auf physikalischem Weg zu erklären, stammt von Metzger. Er behauptet, der Wind sei der maßgebende Faktor bei der Ausbildung der Schaftform. Der Schaft sei ein Träger, der durch die windgedrückte Krone auf Biegung beansprucht werde. Alle übrigen Beanspruchungen durch das Eigengewicht usw. treten demgegenüber so stark zurück, daß man sie praktisch vernachlässigen könne. Aus ökonomischen Gründen erfolge die Dimensionierung dieses Trägers so, daß er an jeder Stelle eben noch die erforderliche Sicherheit besitze, daß er also ein Träger gleichen Biegungswiderstandes sei.

Am leichtesten läßt sich das Zutreffen dieser Theorie für den astfreien Schaftteil untersuchen. Für diesen kann man sich nämlich den ganzen, auf die Krone wirkenden Winddruck in einem Punkt konzentriert denken. Nach den Regeln der Mechanik besitzt ein Träger, der an einer Seite (Wurzel) eingespannt ist und an der anderen

durch eine Einzelkraft (windgedrückte Krone) beansprucht wird, als Träger gleichen Biegungswiderstandes gerechnet, die Form einer kubischen Parabel; sein Durchmesser

$$d_s = \sqrt[3]{\frac{32 \text{ PS}}{\pi K_b}},$$

wobei P die Größe der Einzelkraft,  $K_b$  die Biegungsbeanspruchung und S den Abstand des untersuchten Querschnittes vom Angriffspunkt der Kraft bedeutet.

Da für einen bestimmten Stamm der Ausdruck  $\sqrt[3]{\frac{32 \text{ P}}{\pi K_b}}$  konstant ist, soll er mit  $2a_s$  bezeichnet werden. Somit ist  $d_s = 2a_s \sqrt[3]{\frac{S}{--}}$ .

Wenn dem astfreien Schaftteil diese Formel entspricht, dann ist  $d_s^3 = 8a_s^3 S$ , d. h. eine Gerade. Wenn man also die dritten Potenzen der Durchmesser bildet und an der Stelle, an der sie abgegriffen wurden, aufträgt, erhält man eine Gerade (Fig. 2), die ebenso wie die Parabel durch den Ursprung geht und dort mit dem Angriffspunkt der Kraft zusammenfällt. Diese Erkenntnis ist deshalb wichtig, weil wir durch sie in die Lage versetzt sind, ohne jede Annahme über die Form und Größe des Kronenlängsschnittes und die Lage seines Schwerpunktes das Vorhandensein der Parabel dritter Ordnung im astfreien Schaftteil zu kontrollieren. Es ist nämlich, wie wir später sehen werden, leicht möglich, daß bei einer unrichtigen Annahme des Kronenschwerpunktes das Vorhandensein dieser Parabel nicht klar in Erscheinung tritt.

Der von Metzger zum Vergleich der berechneten und gemessenen Werte angewendete Vorgang war nun der, daß er in der vorhin erwähnten Art die dritten Potenzen der Durchmesser auftrug (Fig. 2) und die erhaltenen Werte durch eine Gerade ausglich. Aus den ausgeglichenen Werten zog er die dritten Wurzeln, erhielt dadurch die ausgeglichenen Durchmesser und, durch Differenzbildung mit dem gemessenen, die Abweichungen.

Der erste Einwand, den man gegen das Zutreffen dieser Gleichung machen kann, ist der Hinweis auf den Stammfuß, der das Auftreten eines Wendepunktes bedingt. Eine Parabel hat aber keinen Wendepunkt.

Metzger erklärt diese Abweichungen folgendermaßen (S. 50): Jede Säule, welche nicht selbst tief in den Boden eingelassen ist, erfordert eine solche Verbreiterung ihres Fußes, und spielt der Wurzelanlauf keine andere Rolle.

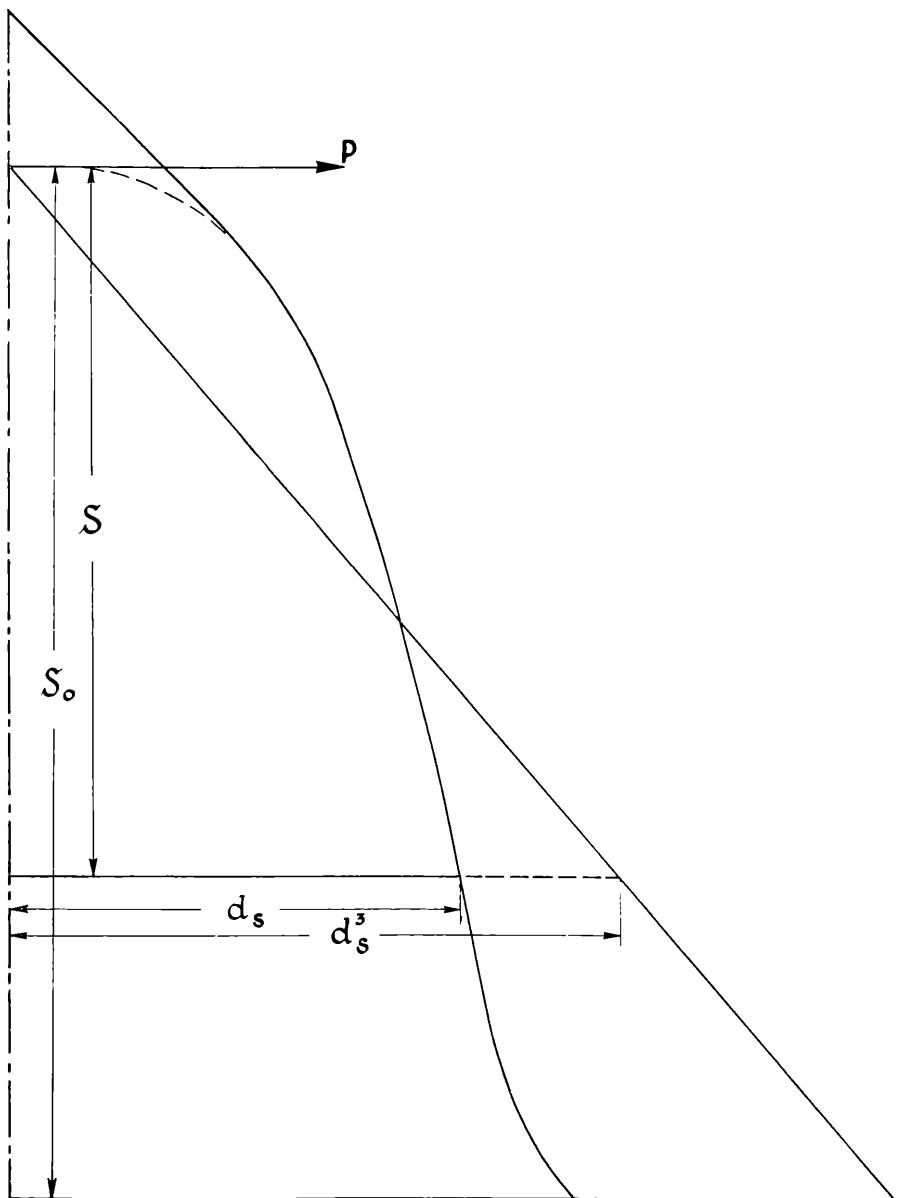


Fig. 2.

Tiren hat diese Theorie einer eingehenden Prüfung unterzogen. Hierbei hat er zunächst die beanspruchende Kraft durch Messung der Windgeschwindigkeit in verschiedenen Höhen und des Winddruckes bei verschiedener Windgeschwindigkeit und verschiedener Lage der Äste untersucht. Eine ebenso eingehende Untersuchung hat er dem Gewicht und der Oberfläche der Nadeln angedeihen lassen. Hierdurch konnte die Beanspruchung des Stammes festgelegt werden.

Hierauf wurde die Abhängigkeit der Holzfestigkeit vom Wassergehalt und spezifischen Gewicht geprüft, wodurch alle Grundlagen für die Berechnung des Schaftes gegeben waren.

Es wurden dann die Formeln für die Träger gleichen Widerstandes gegen Biegung, Knick und Verdrehung abgeleitet, wobei ziemliche Schwierigkeiten zu überwinden waren. (Druckbeanspruchung scheidet wegen ihrer Geringfügigkeit aus.)

Schließlich wurden die Ergebnisse der Theorie an Probestämmen nach den Faserverkürzungen und Photographien windgebeugter Bäume überprüft und Übereinstimmung auf  $\pm 2\%$  gefunden.

Auch das Ergebnis dieser tiefer eindringenden Untersuchungen bestätigt somit das Zutreffen der mechanischen Theorie.

Da der Einfluß der Torsions- und Knickbeanspruchung auf die Schaftform nicht sehr bedeutend ist, die hiefür abgeleiteten Formeln jedoch sehr kompliziert und schwer zu handhaben sind, soll der Stamm in den folgenden Untersuchungen nur als Träger gleichen Biegswiderstandes betrachtet werden.

Alle Abweichungen, die die tatsächliche Stammform gegenüber diesem Träger aufweist, sollen als Beobachtungsfehler im Sinne der Ausgleichsrechnung betrachtet werden, gleichgültig ob es sich um vereinfachte Annahmen über die Form der Krone, die Biegsfestigkeit des Stammes, die Art der Beanspruchung oder ähnliches handelt.

Nur auf diese Weise ist es möglich, den ganzen Fragenkomplex durchzuarbeiten, ohne in mathematischen oder sachlichen Schwierigkeiten stecken zu bleiben. Diese Vernachlässigungen verlangen allerdings eine schrittweise Kontrolle für die Richtigkeit der abgeleiteten Formeln, damit sich an Zwischenpunkten keine unkontrollierten Einflüsse geltend machen können.

In diesem Sinne ergibt sich aus der Metzgerschen Schaftformhypothese, daß die Form der Gleichung des astfreien Schaftteiles von der Form und Größe der Krone vollkommen unabhängig ist und der Formel  $d_s = 2a_s \sqrt[3]{S}$  entspricht.

Anders verhält es sich mit dem innerhalb der Krone liegenden Schaftteil. Die Form seiner Gleichung wird durch die Kronenform bedingt.

Um sie berechnen zu können, müssen wir in gleicher Weise vorgehen, wie bei der Berechnung der Form des astfreien Schaftteiles: wir denken uns das innerhalb der Krone gelegene Schaftstück durch die windgedrückte Krone beansprucht und als Träger gleichen Biegungswiderstandes gerechnet.

Vorerst müssen wir uns über die Form und Größe der als „Last“ wirkenden windgedrückten Krone klar werden. Das Nächstliegende wäre, die Belastungsform gleich dem Kronenlängsschnitt zu wählen (Fig. 3).

Betrachtet man aber die Wirkung des Windes im Bestande, dann bemerkt man, daß die unteren Teile der Krone durch den Schutz der Nachbarstämme der Windwirkung um sehr viel weniger ausgesetzt sind als die oberen. Diese Reduktion der Windwirkung ist natürlich nach Stammklassen verschieden stark. Es ist ganz gut denkbar, daß die untersten Äste keinen Einfluß auf die Schaftform haben und daß sich demgemäß der physikalische Kronenansatz mit dem physiologischen nicht deckt.

Anderseits wird die Krone in ihrem obersten Teil dem Wind infolge ihrer geringeren Dichte einen geringeren Widerstand — pro Einheit ihrer Längsschnittfläche — entgegensetzen als in tieferen Lagen. Diese Verringerung wird sich aber nur im obersten Kronenteil geltend machen, da die Blattzone, welche den Hauptwiderstand bildet, einen Kegelmantel von mäßiger Dicke darstellt. Solange der Kronendurchmesser größer ist als die doppelte Stärke des Mantels, wird sich keine besondere Druckverminderung bemerkbar machen (Fig. 3 von A—B). Das oberste Stück (B—C) hat aber auf die Gesamtform keinen besonderen Einfluß.

Überdies erleidet die Form einer windgebeugten Krone dadurch eine bedeutende Veränderung, daß die langen Äste eine viel stärkere Durchbiegung erfahren. Dadurch wird die Krone schlanker als sie uns bei Windstille erscheint.

Wenn wir nun aber den Kronenlängsschnitt als Belastung annehmen wollen, um hieraus die Form des innerhalb der Krone liegenden Schaftteiles zu berechnen, dann müssen wir am tatsächlichen Kronenlängsschnitt solche Veränderungen anbringen, daß pro Flächeneinheit des „reduzierten“ Kronenlängsschnittes überall der gleiche Winddruck wirksam gedacht werden kann.

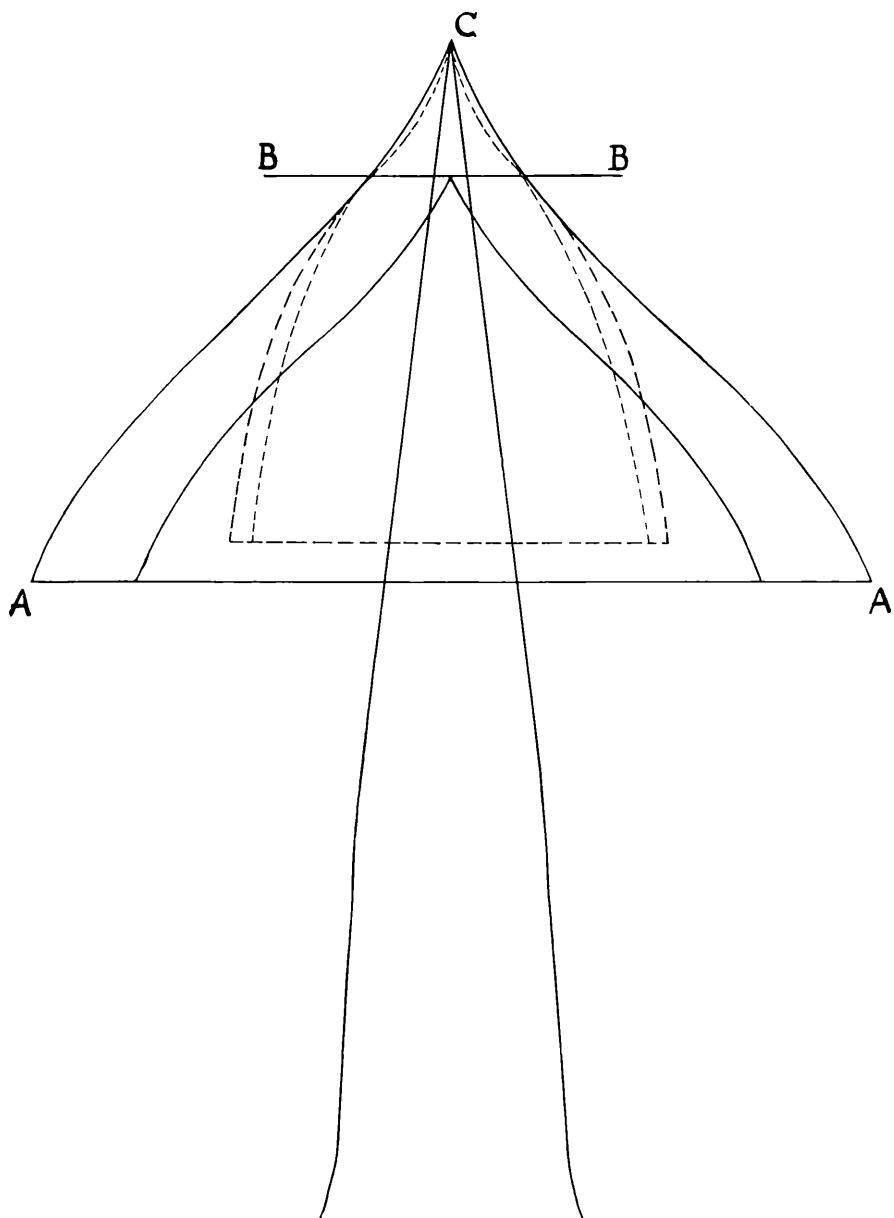


Fig. 3.

Wir müssen demnach den unteren Teil der Krone verschmälern wegen der Schutzwirkung der Nachbarbäume und eventuell den Kronenansatz nach aufwärts verschieben (gestrichelte Linie) und außerdem verschmälern wegen der stärkeren Durchbiegung der unten befindlichen langen Äste (punktiierte Linie). Überdies müssen wir den obersten Teil wegen der geringeren Kronendichte verschmälern (punktiierte Linie). Die punktierte Linie gäbe uns also den der Berechnung der Schaftform innerhalb der Krone zugrunde zu legenden „reduzierten“ Kronenlängsschnitt an.

Wie aus den eben angestellten Betrachtungen hervorgeht, kann für den innerhalb der Krone liegenden Schaftteil nicht eine für alle Fälle gültige Formel angegeben werden, wie das für den astfreien Schaftteil der Fall war.

Um zu einem praktisch verwendbaren Resultat zu gelangen, sind wir gezwungen, eine — möglichst allgemeine — Annahme über die Form des reduzierten Kronenlängsschnittes zu machen. Erst der im nächsten Abschnitt durchgeföhrte Vergleich mit tatsächlichen Messungen kann den Nachweis der Zulässigkeit der Annahme bringen.

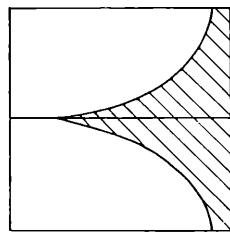
Diese Annahme lautet: Der reduzierte Kronenlängsschnitt besitze die Form einer allgemeinen Parabel. Sein Durchmesser  $D_k = 2a_1 k^r$  ( $k = \text{Kronenlänge}$ ).

Diese mathematisch einfach gebaute Gleichung besitzt durch Veränderung des Potenzexponenten  $r$  eine außerordentliche Mannigfaltigkeit der Form. In den nebenstehenden Figuren sind jene Kronenformen gezeichnet, die einem  $r$  von  $-1, 0, +\frac{1}{2}, +1, +2$  entsprechen (Fig. 4).

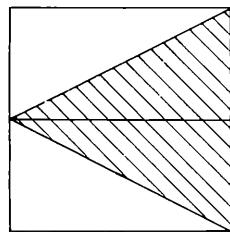
Ein reduzierter Kronenlängsschnitt der Type 1 dürfte wohl kaum vorkommen ( $r = -1$ ), ebenso — mit Rücksicht auf die bereits erwähnte, geschwächte Windwirkung im unteren Kronenteil — ein solcher der Type 5 ( $r = +2$ ). Es wird demnach die Schwankung des Exponenten  $r$  hauptsächlich zwischen 0 und +1 stattfinden; eine Ansicht, die durch die späteren Vergleiche mit Messungsergebnissen bestätigt werden wird.

Die Formel zur Berechnung der Biegungsfestigkeit lautet  $K_b = \frac{M}{W}$ .

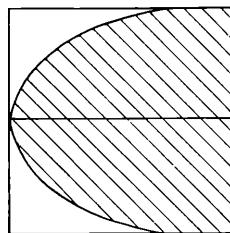
Untersuchen wir den Querschnitt A—A in Fig. 5, dann wird das in diesem auftretende Biegmomment  $M$  durch das Produkt aus der wirkenden Kraft  $P$  und ihrem Abstand  $e$  vom untersuchten Querschnitt dargestellt  $M = P \cdot e$ . Da wir schon den reduzierten Kronenlängsschnitt vor uns haben, kann  $P$  als Produkt der Längsschnittfläche  $F_k$  mit



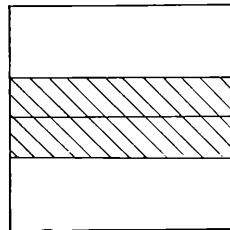
$\tau = +2$



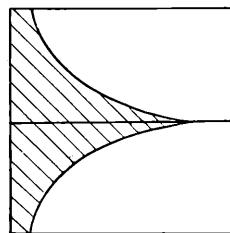
$\tau = +1$



$\tau = 0,5$



$\tau = 0$



$\tau = -1$

Fig. 4.

einer konstanten Größe  $c$ , dem Druck pro Flächeneinheit, betrachtet werden.

$P = F_k \cdot c$ . Da wir nun  $F_k$  als Fläche der Parabel  $D_k = 2a_1 K^r$  angenommen haben, können wir sie auch durch die bekannte Formel

$$F_k = \frac{D_k K}{r+1} \text{ ausdrücken. Es ist somit } P = D_k K \frac{c}{r+1}.$$

Der Angriffspunkt  $P$  der Kraft liegt im Schwerpunkt der gedrückten Fläche. Da diese eine Parabel darstellt, liegt der Schwerpunkt im Abstand  $\frac{K}{r+2}$  über  $A$ .

Die Ableitung dieser Formel erfolgt auf Grund des Satzes, daß das statische Moment des Schwerpunktes einer Fläche in bezug auf eine Gerade gleich sein muß der Summe der statischen Momente der Flächendifferentiale in bezug auf diese Gerade.

Betrachtet man als Bezugsgerade die Gerade  $d-d$  (Fig. 5), so ergibt sich als Moment der Gesamtfläche  $M = F_k(K-e)$ . Da  $F_k =$

$$= \int_0^k 2a_1 K^r dD_k = \frac{2a_1}{r+1} K^{r+1}, \text{ so ist } M = \frac{a_1}{r+1} K^{r+1} (K-e). \text{ Die Momente der Flächendifferentiale in bezug auf die gleiche Achse sind } M = \int_0^k K D_k dD_k; \text{ da } D_k = 2a_1 K^r, \text{ so ist } M = \int_0^k 2K a_1 K^r dD_k =$$

$$= \frac{2a_1}{r+2} K^{r+2}. \text{ Durch Gleichsetzen beider Momente erhält man:}$$

$$\frac{2a_1}{r+1} K^{r+1} (K-e) = \frac{2a_1}{r+2} K^{r+2}, \text{ hieraus } (K-e) = \frac{r+1}{r+2} K \text{ und } e =:$$

$$= \frac{K}{r+2}.$$

$$\text{Da } M = P \cdot e \text{ ist, erhalten wir durch Einsetzen } M = D_k K \frac{c}{r+1} \cdot \frac{K}{r+2}.$$

Das Widerstandsmoment  $W$  ist für einen kreisförmigen Querschnitt

$$W = \frac{\pi}{32} d^3. \text{ Somit ist } K_b = \frac{M}{W} = \frac{D_k K \cdot \frac{c}{r+1} \cdot \frac{K}{r+2}}{\frac{\pi}{32} d_k^3}. \text{ Hieraus errechnet}$$

$$\text{sich } d_k^3 = D_k K^2 \frac{32c}{\pi K_b (r+1)(r+2)}. \text{ Setzen wir für den Kronendurchmesser } D_k = a_1 K^r \text{ in diese Gleichung ein, dann erhalten wir}$$

$$d_k^3 = K^{r+2} \frac{64a_1 c}{\pi K_b (r+1)(r+2)} \text{ und } d_k = K^{\frac{r+2}{3}} \sqrt[3]{\frac{64a_1 c}{\pi K_b (r+1)(r+2)}}$$

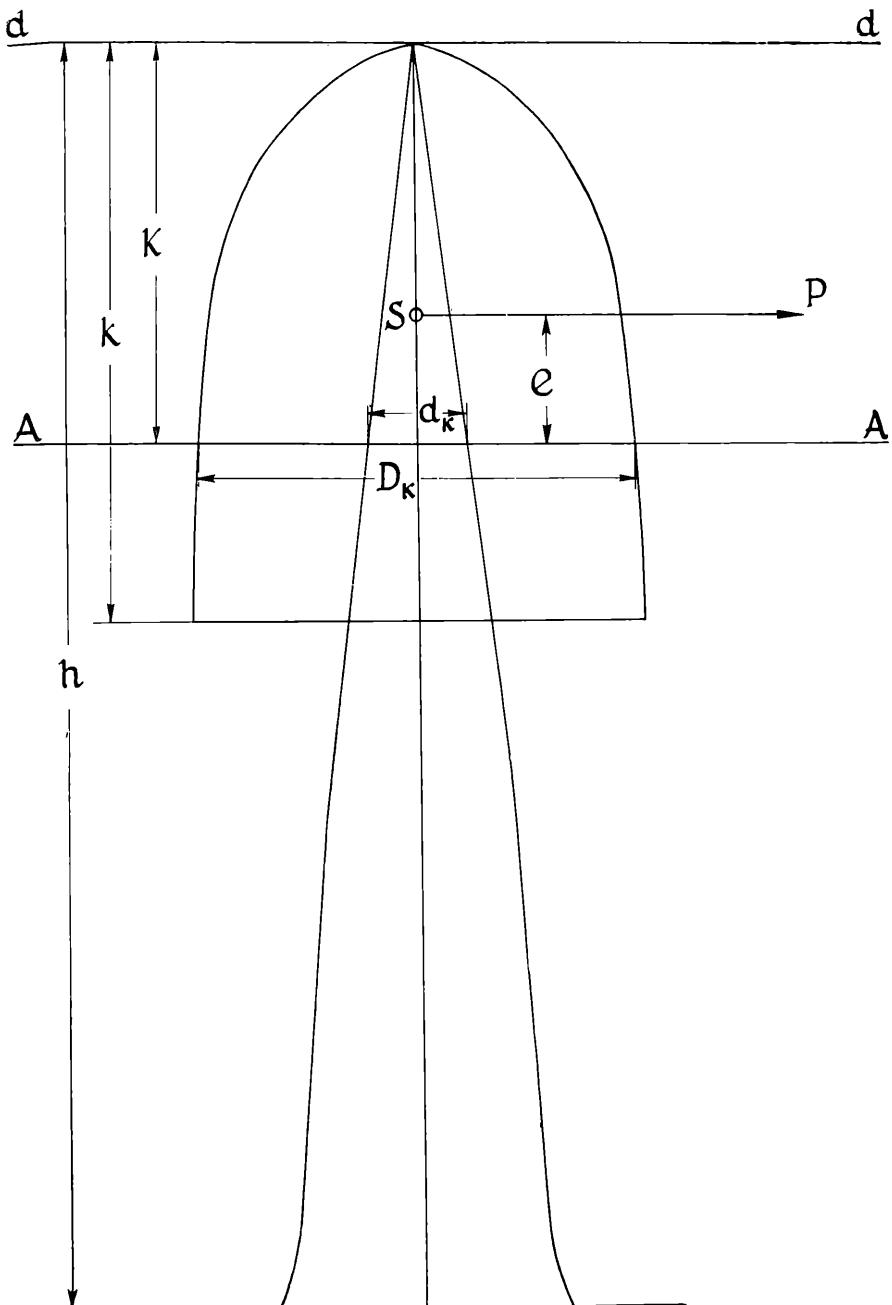


Fig. 5.

In dieser Gleichung sind nur  $d_k$  und  $K$  veränderlich, die übrigen Zahlen für einen bestimmten Stamm konstant. Wir können daher den Ausdruck  $\sqrt[3]{\frac{64 a_1 c}{\pi K_b (r+1) (r+2)}} = 2 a_k$  setzen, einer neuen Konstanten; dann erhalten wir für die Gleichung des bestesteten Schaftteiles die Formel  $d_k = 2 a_k K^{\frac{r+2}{3}}$

Auch der Stammfuß hat eine mechanische Ursache, die schon Metzger erkannt und Leon näher präzisiert hat. Eine Berechnung der hiedurch hervorgerufenen Vergrößerung des untersten Stammquerschnittes gestaltet sich an sich schon sehr schwierig und könnte überdies infolge der verschiedenen Streichtiefe und Richtung der Wurzeln und der verschiedenartigen Beschaffenheit des Bodens zu keinerlei brauchbarem Resultat führen. Bei den nun folgenden theoretischen Erörterungen werden daher die durch ihre Spannungsumleitungen hervorgerufenen Formveränderungen unberücksichtigt bleiben; erst bei den Folgerungen für die Praxis wird ihnen Rechnung getragen werden.

## 2. Vergleich der berechneten mit der wirklichen Schaftform.

Dr. Ing. Josef Zelisko hatte die Freundlichkeit, mir für diese Untersuchungen die Ergebnisse von 20 Probestammaufnahmen zur Verfügung zu stellen. Die Durchmesser wurden von Meter zu Meter als Mittel von zwei übers Kreuz vorgenommenen Messungen erhoben.

Der Vergleich der berechneten und gemessenen Werte wurde nach der von Metzger angewendeten, Seite 27 näher erklärten Methode durchgeführt. Er wurde an 260 Punkten vorgenommen und ergab keinerlei prinzipielle Abweichungen. Die größte Differenz betrug  $-1,14 \text{ cm} (= -2,8\%)$  an einer unregelmäßigen Schaftstelle (Durchmesser in 15 m Höhe 38,8 cm, 16 m 40,3 cm, 17 m 38,2 cm). Unter allen 260 Messungen war nur an dieser einen Stelle die Abweichung größer als 1 cm. Die mittleren Differenzen sind aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

**Tabelle 16.**

Stamm Nr.	Differenz mm								
1	1,6	5	3,2	9	4,6	13	3,8	17	2,4
2	1,8	6	4,9	10	3,8	14	4,4	18	2,8
3	2,5	7	3,9	11	2,2	15	4,8	19	1,2
4	2,0	8	—	12	4,2	16	2,8	20	2,6

Der Stamm 8 mußte wegen auffallend unregelmäßigen Schaftverlaufes ausgeschieden werden. Er nahm nämlich auf eine Länge von 4 m nach aufwärts an Stärke zu.

Aus den angeführten Vergleichen der berechneten und gemessenen Werte geht bezüglich des astfreien Schaftstückes hervor, daß die Parabel 3. Ordnung mit solcher Genauigkeit eingehalten wird, daß es berechtigt erscheint, hieraus weitere Schlüsse für die Holzmeßkunde zu ziehen.

Zur Untersuchung der Form des beasteten Schaftteiles mußte eine andere Methode gewählt werden, da hier der Exponent  $r$  der Parabel  $d_k = 2a_k K^{\frac{r+2}{3}}$  nicht von Haus aus bekannt ist.

Zur Ermittlung von  $r$  wurde das Volumen des beasteten Schaftteiles herangezogen. Wenn nämlich der Schaftlängsschnitt — der Annahme entsprechend — parabelförmig ist, dann kann man aus dem Volumen des Rotationsparaboloides auf den Potenzexponenten der Parabel schließen, die die Erzeugende ist:

Die Gleichung der Parabel lautet  $d_k = 2a_k K^{\frac{r+2}{3}}$ . Setzen wir  $\frac{r+2}{3} = n$ , dann erhalten wir  $d_k = 2a_k K^n$ . Der zur Volumsberechnung nötige Radius  $r_k = a_k K^n$ . Das Volumen eines Rotationsparaboloides ist bei Rotation um die Symmetrieachse  $K$ :

$$V_k = \pi \int_0^k a_k K^{2n} dD_k = \frac{\pi a_k^2}{2n+1} K^{2n+1}$$

Nun ist die Querschnittsfläche im Abstand  $K$  vom Gipfel  $g_k = r_k^2 \pi = a_k^2 K^{2n} \pi$ . Eingesetzt erhalten wir  $V_k = \frac{g_k K}{2n+1}$ . Hieraus errechnet

$$\text{sich } n = \frac{\frac{g_k K}{V_k} - 1}{2}.$$

Durch Berechnung der Querschnittsfläche  $F_k$  im Kronenansatz, des Volumens und der Länge des darüberliegenden Schaftteiles sind wir also in die Lage versetzt, den Exponenten  $n$  des Schaftparaboloides zu bestimmen. Wenn das erfolgt ist, kann aus der Gleichung  $d_k = 2a_k K^n$  die Konstante  $a_k = \frac{d_k}{2K^n}$  und mit ihrer Hilfe die Schaftparabel  $d_k = 2a_k K^n$  punktweise errechnet werden. Die Resultate dieser Berechnung könnten nun mit den Messungsergebnissen verglichen und die Abweichungen bestimmt werden, wenn nicht zu

berücksichtigen wäre, daß ein Zusammenhang zwischen dem Paraboloid des beasteten und dem des astfreien Schaftteiles besteht, der dadurch ausgedrückt wird, daß das Paraboloid des astfreien Schaftteiles seinen Scheitel im Schwerpunkt des reduzierten Kronenlängsschnittes hat. Hierdurch wird erreicht, daß die beiden Parabeln ohne Knick ineinander übergehen, da sie sich gerade im Kronenansatz berühren.

Um nun diesen Zusammenhang zwischen den beiden Paraboloiden herzustellen, wurde folgender Vorgang eingehalten:

1. Durch Verlängerung der „Drittepotenzgeraden“ bis zum Schnitt mit der Schaftlängsachse wurde der Schwerpunkt der Parabel des reduzierten Kronenlängsschnittes festgestellt (Fig. 6). Seine Höhe über dem Boden betrage  $S_o$ .

2. Aus der Masse des über dem Kronenansatz gelegenen Schaftteiles

$$\frac{g_k K}{V_k} - 1$$

wurde nach der oben abgeleiteten Formel  $n = \frac{2}{\frac{g_k K}{V_k} - 1}$  der Exponent der Parabel des beasteten Schaftteiles errechnet.

3. Mit Hilfe dieses Exponenten wurde der Abstand des Schwerpunktes des Kronenparaboloides vom Kronenansatz nach der Formel  $s = \frac{h - S_o}{3n - 1}$  errechnet.

S. 34 wurde die Formel  $e = \frac{K}{r+2}$  abgeleitet. Setzt man hierin

für den beliebigen Teil  $K$  der Kronenlänge die ganze Kronenlänge  $k$  nach Fig. 6, dann wird  $e = s$ . Setzen wir ferner den unbekannten Kronenexponenten  $r = 3n - 2$  (da S. 37  $n = \frac{r+2}{3}$ ), dann wird  $s = \frac{k}{3n}$

Da aber, wie wir gesehen haben (S. 30), die der Berechnung zugrunde zu legende Kronenlänge nicht feststeht, soll die Lage des Schwerpunktes statt durch  $k$  durch  $h - S_o$  ausgedrückt werden; das ist jene Strecke, um die der Kronenschwerpunkt unterhalb des Gipfels liegt.

$$s = \frac{k}{3n}; \quad k = 3ns; \quad k - s = h - S_o = 3ns - s = s(3n - 1); \quad s = \frac{h - S_o}{3n - 1}.$$

4. Der Kronenansatz müßte jetzt um die Strecke  $s$  unterhalb des Schnittes der Drittepotenzgeraden mit der Schaftachse liegen, also  $S_o - s = h - k$ . Dieser berechnete Kronenansatz muß aber mit dem unter Punkt 2 zur Berechnung des Volumens des beasteten Schaft-

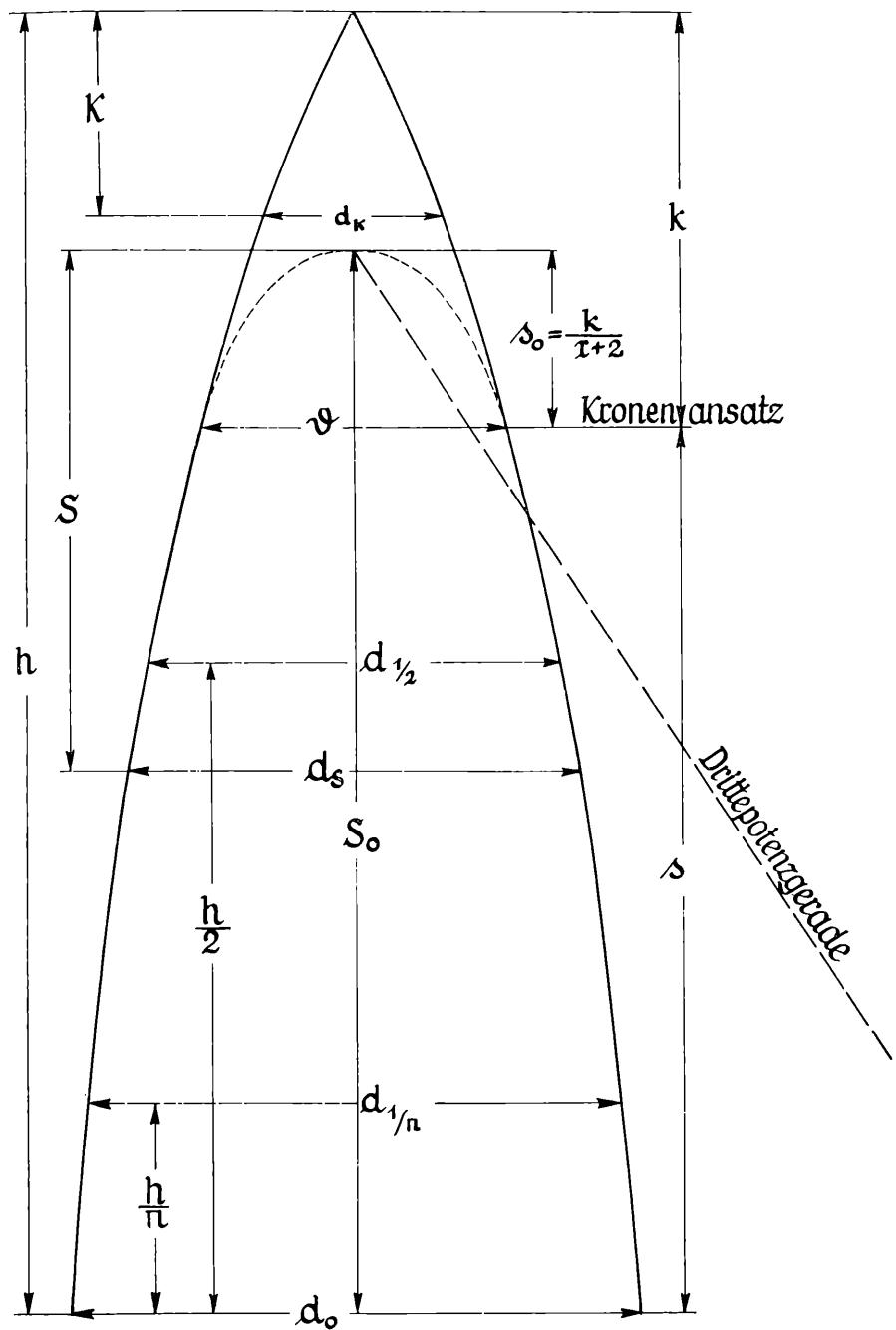


Fig. 6.

teiles angenommenen übereinstimmen. Ist das nicht der Fall, so muß die Berechnung mit einem geänderten Kronenansatz neu durchgeführt werden, bis eine Übereinstimmung erzielt ist.

Die Resultate der in der angegebenen Form angestellten Berechnungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Aus ihr ergibt sich, daß die berechneten und gemessenen Kronenlängen — und somit auch die Kronenprozente — zwar im allgemeinen einen gleichartigen Verlauf zeigen, daß jedoch im einzelnen Fall leicht größere Abweichungen vorkommen können. Das Untersuchungsmaterial reicht nicht aus, um feststellen zu können, ob nicht im Einzelfall mit Rücksicht auf die Stammklasse und den Standraum des Stammes die reduzierte Kronenlänge angegeben werden könnte. Der Vorteil einer solchen Möglichkeit läge — wie ja aus dem Gesagten hervorgeht und später näher besprochen werden soll — darin, daß die Bestimmung der Formzahl sehr vereinfacht wäre, da sie nur eine Funktion des reduzierten Kronenprozenten, des Potenzexponenten  $n$  des beasteten Schaftteiles und der Konstanten  $a_k$  ist.

**Tabelle 17.**

Stamm Nr.	Höhe	Kronenlänge		Kronenprozent		Exponent	
		Gemessen	Berechnet	Gemessen	Berechnet	r	n
1	39	23	21	59	46	— 0,056	0,648
2	32,5	17,5	16	54	51	— 0,116	0,628
3	41,5	24,5	15	59	36	1,330	1,110
4	30,5	13,5	14	44	46	0,152	0,718
5	32,1	13,1	11	41	35	0,220	0,740
6	42,5	20,5	18,5	48	44	— 0,170	0,610
7	32,4	14,4	15,9	44	49	— 0,128	0,624
8	36,5	12,5	17,5	34	48	0,010	0,670
9	32,0	15,0	10	47	31	0,865	0,955
10	27,5	10,5	8	38	29	0,625	0,875
11	27,5	11,5	9,5	42	35	0,445	0,815
12	24,0	5,0	8,5	21	35	— 0,335	0,555
13	24,0	6,0	7,0	25	29	— 0,200	0,600
14	32,7	19,7	18,7	60	57	0,631	0,877
15	16,2	10,2	5,2	63	32	1,215	1,075
16	24,0	14,0	13	58	54	0,400	0,800
17	22,4	10,4	10,4	46	47	— 0,017	0,661
18	22,0	14,0	11,0	64	50	— 0,113	0,629
19	19,1	7,1	8,1	37	42	0,148	0,716
20	16,7	6,7	6,7	40	40	0,250	0,750

Eine ähnliche Feststellung bezüglich der Verwendbarkeit des tatsächlichen Kronenprozentes zur Berechnung der Formzahl hat Schiffel in seinen Formzahlwerken (Form und Inhalt der Fichte, Tanne, Lärche und Kiefer) wiederholt gemacht.

Bezüglich des Formexponenten  $n$  des beasteten Schaftteiles und des ihm entsprechenden Exponenten  $r$  des reduzierten Kronenlängsschnittes kann die Feststellung gemacht werden, daß er Schwankungen von 0,555—1,110, entsprechend einem  $r = -0,335$  bis  $+1,330$ , ausgesetzt ist, daß er sich aber im allgemeinen um Null herum bewegt, der reduzierte Kronenlängsschnitt also einem Zylinder gleicht, ein Ergebnis, das ja nicht sinnwidrig erscheint.

Die negativen Werte sind jedoch sinnwidrig, da ihnen ein Kronendurchmesser von  $\infty$  am Gipfel entsprechen würde (Fig. 4,  $r = -1$ ). Da diese Werte mit Ausnahme der Stämme 12 und 13 wenig unter Null liegen, kann die Negativität wohl mit Recht auf die gefühlsmäßige Ausgleichung bei der Kurvenberechnung zurückgeführt werden.

Bei den Stämmen 12 und 13, deren  $r$  ziemlich stark unter Null liegt, dürfte es sich wohl schon um prinzipielle Abweichungen handeln, deren Ursache in sehr kleinen Kronenprozenten zu suchen sein wird (21% bzw. 25%).

Es handelt sich hier zweifellos um Stämme, die aus einer höheren Stammklasse in eine niedrigere zurückgefallen sind. Denken wir uns z. B., daß diese Stämme bei einer Höhe von 20 m noch 40% Krone gehabt hätten und nunmehr bei 24 m nur noch 20% haben, dann würde ihnen bei — der Einfachheit halber — geradlinig angenommenem beastetem Schaftteil nachstehende Form zukommen.

$$\begin{aligned} &\text{Höhe 20 m, Kronenprozent 40\%} \\ &\text{Kronenlänge 8 m} \\ &\text{Kronenansatz 12 m} \\ &\text{Kronenschwerpunkt } 12 + \frac{8}{3} = \\ &= 14,7 \text{ m} \\ &\text{Durchmesser in 12 m } 15 \text{ cm} \\ &\text{(angenommen),} \\ &\text{Konstante } 8a_s^3 = \frac{d_o^3}{S_o} = \frac{0,15^3}{2,67} = \\ &= 0,001234. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Höhe 24 m, Kronenprozent 20\%} \\ &\text{Kronenlänge 4,8 m} \\ &\text{Kronenansatz 19,2 m} \\ &\text{Kronenschwerpunkt } 19,2 + \frac{4,8}{3} = \\ &= 20,8 \text{ m} \\ &\text{Konstante } 8a_s^3 = 0,000456. \end{aligned}$$

Der Kronenschwerpunkt liegt, da für den reduzierten Kronenlängsschnitt die Dreiecksform angenommen wurde, in einem Drittel der Krone.

Die Konstante  $8a_s^3$  für eine Baumhöhe von 24 m errechnet sich aus der für die Höhe von 20 m bestimmten dadurch, daß letztere

proportional der geänderten Kronenfläche verkleinert wird, da  $8a_s^3 = \frac{32P}{\pi k_b}$  ist (wobei  $P = cF$ ) und nur  $F$  verändert wird. Da die Kronenlänge von 8 m auf 4,8 m zurückgeht, ändert sich die Fläche mit dem Quadrat des Bruches  $\left(\frac{4,8}{8}\right)^2 = 0,36$ .

Zur Berechnung ergeben sich somit für die beiden Höhen nachstehende Formeln. (Index 1 für 20 m, 2 für 24 m.)

$d_1 = \sqrt[3]{0,001264} (14,7-h)$ ,  $d_2 = \sqrt[3]{0,000456} (20,8-h)$  für den astfreien Schaft und  $d_1 = 0,0187$  (20—h),  $d_2 = 0,0187$  (24—h) für den beasteten Schaftteil.

Die Durchmesser in den einzelnen Höhen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt (Vgl. Fig. 7).

Tabelle 18.

	0 m	4 m	8 m	12 m	16 m	20 m	24 m
$h = 20$	26,5	23,8	20,4	15,0	7,5	0	—
$h = 24$	21,2	19,7	18,0	15,9	13,0	7,5	0

Wie aus den angestellten Berechnungen hervorgeht, ist der untere Schaftteil infolge der längeren Krone für die Zeit, als der Baum erst 20 m hoch war, stärker gewesen als er bei einer Höhe von 24 m sein müßte. Demgemäß weist auch die Schaftkurve keinen einheitlichen Verlauf auf. Da ihr aber ein solcher unterlegt wurde, sind die sinnwidrigen Ergebnisse der Stämme 12 und 13 verständlich. Ähnliche Uneinstimmigkeiten werden auch späterhin bei sehr niedrigen Kronenprozenten zu erwarten sein. Die Erklärung dürfte auch dann in den eben auseinandergesetzten Verhältnissen liegen.

Nach diesen Erwägungen wird auch die Tatsache verständlich, daß bei stark unterdrückten Bäumen mitunter die Jahrringbildung im untersten Stammteil unterbleibt (Hartig, Altes und Neues, S. 28) sowie die Schwierigkeiten, welche Tiren mit der Berechnung unterdrückter Stämme hatte.

Was die Übereinstimmung der berechneten Parabeln mit den Messungsergebnissen betrifft, so ist von vornherein zu erwarten, daß diese nicht in so hohem Maße stattfindet, wie beim astfreien Schaftteil, da es sich hier nur um Nährungswerte handelt. Für die praktische Verwendung der Ergebnisse ist aber eine vollständige

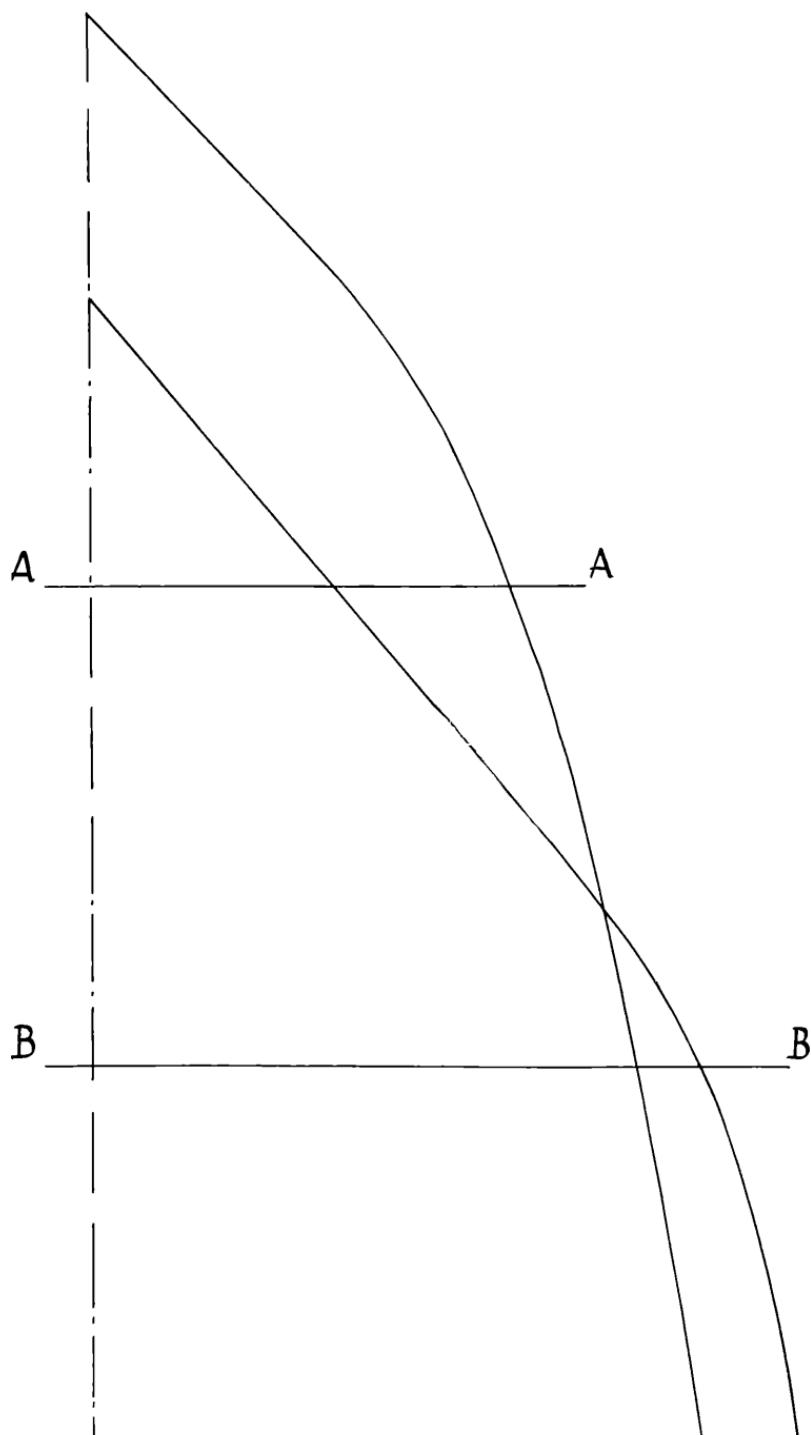


Fig. 7.

Übereinstimmung im beasteten Schaftteil nicht unbedingt erforderlich, da sich Fehler infolge der geringen Durchmesser im Gesamtergebnis nicht so stark fühlbar machen, wie in den unteren Schafteilen.

Im allgemeinen kann gesagt werden, daß bei nicht allzu langer Krone die Abweichungen unter 1 cm betragen. Größere Differenzen als diese kamen nur bei den Stämmen 1, 6 und 14 vor, die auch Kronenlängen von über 20 m besitzen. Die größte Abweichung betrug 2,52 cm bei einem Durchmesser von 20 cm. Bei so großen Kronenlängen macht sich eben schon die mangelnde Schmiegsamkeit der Parabel geltend.

Auch das Gipfelstück weist bei fast allen Stämmen in den obersten 2—4 m Abweichungen von 2—3 cm auf, die aber lediglich theoretischen Wert besitzen, da die Durchmesser 8 cm nicht übersteigen.

Jedenfalls ist auch innerhalb des beasteten Schaftteiles die Übereinstimmung zwischen tatsächlichen Verhältnissen und der angenommenen Parabelform derart, daß diese Annahme auch weiterhin beibehalten und ausgewertet werden kann.

### C. ANGEWANDTER TEIL.

Durch die bisherigen Ausführungen scheinen die Hypothesen für den Massenzuwachs und die Stammform soweit gesichert zu sein, daß aus ihnen die für die forstliche Praxis wichtigen Folgerungen gezogen werden können.

Dem Charakter der beiden Hypothesen entsprechend, handelt es sich hiebei einerseits um die Massenermittlung von Stammabschnitten, Stämmen und Beständen, anderseits um die Feststellung des Wachstumsverlaufes in Ertragstafeln.

### I. ANWENDUNG DER SCHAFTFORMGESETZE.

Aus der Metzgerschen Stammformhypothese können hinsichtlich der Massenermittlung zweierlei Folgerungen gezogen werden: erstens können die zur Massenberechnung notwendigen Formeln abgeleitet und mit den bisher üblichen verglichen werden, und zweitens kann die Genauigkeit der nach diesen Formeln errechneten Werte vorhergesagt werden.

#### 1. Massenermittlung von Stammabschnitten.

Zur Ermittlung des Inhaltes von Stammabschnitten steht fast ausschließlich die Mittenflächen- oder Hubersche Formel in Gebrauch; auf sie haben sich daher die Untersuchungen in erster Linie zu erstrecken.

Daneben wurde eine Anzahl von Formeln angegeben, die 2—3 gemessene Durchmesser verlangen. Wenn sie auch bisher keine nennenswerte praktische Bedeutung gewinnen konnten, so wäre doch zu untersuchen, ob ihnen diese nicht wenigstens infolge ihrer größeren Genauigkeit zukommt.

### a) Die Mittenflächenformel (Hubersche Formel).

Die Mittenflächenformel bestimmt das Volumen durch Multiplikation der Querschnittsfläche, gemessen in der halben Länge des betreffenden Stammteiles, mit der Länge. Infolge ihrer überragenden praktischen Bedeutung sind auch in den letzten hundert Jahren zahlreiche Untersuchungen angestellt worden, um auf deduktivem Wege die zu erwartenden Abweichungen vom tatsächlichen Inhalte zu ermitteln. Da aber nach keinem einheitlichen Plane vorgegangen wurde, sondern bald ganze Stämme, bald Stammabschnitte verschiedener Länge, bald mit, bald ohne Rinde gemessen wurden, konnte von den älteren Untersuchungen kein einheitliches Ergebnis erwartet werden.

Anhaltspunkte über Vorzeichen und Größe der zu erwartenden Abweichungen wurden erst durch die Untersuchungen von Flury, Schiffel und Kunze geboten. Aus ihnen geht übereinstimmend hervor, daß Stammstücke, welche aus den unteren Teilen des Stammes herrühren, im allgemeinen mit einem negativen Fehler kubiert werden, der umso größer wird, je länger das Stammstück ist. Dagegen werden ganze Stämme bzw. das Derbholz zumeist mit einem positiven Fehler gemessen, ausgenommen abholzige Stämme. Bei Messung mit der Rinde ist der Fehler größer als ohne Rinde, ausgenommen Fichte und Tanne. Die Untersuchungen von Kunze gestatten auch, Schlüsse zu ziehen über die Größe des zu erwartenden Fehlers, wenn es sich um die Messung des Derbholzes ganzer Stämme handelt.

Ein — mindestens scheinbarer — Widerspruch im Ergebnis dieser Untersuchungen besteht jedoch darin, daß Schaftstücke einen umso größeren negativen Fehler aufweisen, je länger sie sind, während das Derbholz ganzer Stämme — das ja auch als sehr langes Schaftstück aufgefaßt werden kann — einen positiven Fehler zeigt.

Außerdem fehlen umfangreichere Untersuchungen über die Genauigkeit sektionsweiser Kubierungen von ganzen Stämmen bzw. Stammstücken bei verschiedener Länge der Sektionen. Gerade hier ist a priori eine ganz bedeutende Steigerung der Genauigkeit zu erwarten. Hiebei wird zu unterscheiden sein zwischen der Kubierung

einzelner Stämme und Stammabschnitte aus Mittenstärke und Länge bzw. nach dem Sektionsverfahren und zwischen der Kubierung einer Summe von Stämmen oder Stammabschnitten.

Bei der Durchführung von Untersuchungen bediene ich mich der induktiven Forschungsmethode, indem ich von dem Metzgerschen Gesetze ausgehe, daß der Schaft ein Träger gleichen Biegungswiderstandes sei, und zuerst die grundsätzlichen Abweichungen festlege, welche bei Kubierung der Metzgerschen Stammformen mit Hilfe der Mittenflächenformel entstehen.

Hierauf sollen zuerst jene zu erwartenden Fehler mit wechselndem Vorzeichen festgestellt werden, die sich aus der Tatsache ergeben, daß der wirkliche Stamm gewisse Abweichungen von der Metzgerschen Schaftform aufweist; dann jene, die sich als Folge von Messungs- und Abrundungsdifferenzen ergeben, und schließlich jene, die durch das Vorhandensein eines Stammfußes bedingt werden.

Nach Durchführung dieser theoretischen Betrachtungen sollen die zu erwartenden Abweichungen zusammengestellt und mit den Ergebnissen tatsächlicher Messungen verglichen werden. Am Schluß werden die sich für die praktische Anwendung der Mittenflächenformel ergebenden wichtigsten Folgerungen zusammengefaßt.

## I. THEORETISCHE ERÖTERUNGEN.

### 1. Ableitung genauer Kubierungsformeln für die Stutze von Rotationsparaboloiden.

S. 26—36 wurden die Gleichungen der Parabeln der Metzgerschen Schaftformen abgeleitet. Sie lauten:

1. für den astfreien Schaftteil:  $d_s = 2a_s S^{1/3}$ ,

2. für den beasteten Schaftteil:  $d_k = 2a_k k^n$ , wobei n je nach der Kronenform zwischen +1,0 und +2/3 schwankt.

Das Volumen der Stutze von Rotationsparaboloiden läßt sich mit Hilfe der oberen und unteren Durchmesser auf Grund nachstehender Formel berechnen. (Ableitung s. U. Müller, Holzmeßkunde, 3. Aufl., S. 19.)

$$V = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{\pi}{4} l \left( \frac{d_1^{\frac{2+2}{r}} - d_2^{\frac{2+2}{r}}}{d_1^{\frac{2}{r}} - d_2^{\frac{2}{r}}} \right)$$

Für den astfreien Schaftteil beträgt  $r = \frac{2}{3}$ , für den Kronenteil  $r = \frac{4}{3}$  bis 2,0. Es ergeben sich demnach nachstehende Formeln:

1. Für den astfreien Schaftteil:

$$V = \frac{3\pi}{20} l \left( \frac{d_1^5 - d_o^5}{d_1^3 - d_o^3} \right)$$

2. Für den Kronenteil:

$$V = \frac{3\pi}{28} l \left( \frac{\frac{7}{2}d_1^{\frac{7}{2}} - d_2^{\frac{7}{2}}}{\frac{3}{2}d_1^{\frac{3}{2}} - d_2^{\frac{3}{2}}} \right) \text{ bis } V = \frac{\pi}{12} l \left( \frac{d_1^3 - d_2^3}{d_1 - d_2} \right)$$

Eine Formel, welche das Volumen von Paraboloidstutzen nur aus einem Durchmesser und der Länge angibt, läßt sich nicht aufstellen. (U. Müller, S. 20.)

## 2. Ableitung der Fehlerformeln.

Da wir den genauen Inhalt der Stutze nicht durch einen Durchmesser ausdrücken konnten, werden wir von Haus aus damit rechnen müssen, daß wir auch in die Fehlerformel den bereits verwendeten oberen und unteren Durchmesser hineinbekommen.

Nach der Mittenflächenformel ist für den astfreien Schaftteil  $V_1 = \frac{d_m^2 \pi}{4} l_1$ . Nach der genauen Formel ist

$$V_o = \frac{3\pi}{20} l_1 \left( \frac{d_1^5 - d_2^5}{d_1^3 - d_2^3} \right).$$

Das Fehlerprozent, bezogen auf das unrichtige Volumen nach der Mittenflächenformel ist:

$$\Delta \% = \frac{V_1 - V_o}{V_1} 100 = \frac{100 \left[ \frac{d_m^2 \pi}{4} l_1 - \frac{3\pi}{20} l_1 \left( \frac{d_1^5 - d_2^5}{d_1^3 - d_2^3} \right) \right]}{d_m^2 \frac{\pi}{4} l_1}$$

Da nun  $d_m = \left( \frac{d_1^3 + d_2^3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$  ist, erhält man nach Einsetzen und Um-

$$\text{formung } \Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \frac{d_1^5 - d_2^5}{d_1^3 - d_2^3} \right) \left( \frac{2}{d_1^3 + d_2^3} \right)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Diese Formel wäre für die praktische Verwertung höchst unbequem, da zur Fehlerprozentermittlung (also zur Festlegung einer Verhältniszahl) die absoluten Werte benötigt würden. Es soll daher das Durchmesserverhältnis  $\frac{d_2}{d_1} = m$  gesetzt werden. Man erhält dann:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right) \left( \frac{2}{1+m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad .1$$

In gleicher Weise lassen sich die Abweichungen für den beasteten Schaftteil berechnen. Man erhält:

$$\text{bei } m = \frac{2}{3} \quad \Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{3}{7} \left( \frac{\frac{1-m^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1-m^2}{2}} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \quad .2$$

$$\text{bei } m = 1,0 \quad \Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{1-m^3}{(1-m)(1+m)^2} \right) \right] \quad .3$$

Diese Formeln lassen sich für alle Werte von m — die zwischen 0,0 und 1,0 liegen — ein für allemal ausrechnen und in Tabellen oder — zur praktischen Auswertung — in Kurvenform zusammenstellen. Man erhält folgendes Ergebnis:

**Tabelle 19.**

Schaftteil	n	m = oberer Durchmesser : unterer Durchmesser				
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
Astfrei	$\frac{1}{3}$	+ 4,76	+ 4,72	+ 4,52	+ 4,06	+ 3,32
Beastet	$\frac{2}{3}$	- 8,00	- 7,85	- 5,42	- 3,90	- 2,57
Beastet	1,0	- 33,33	- 22,31	- 14,79	- 9,64	- 6,12

Schaftteil	n	m = oberer Durchmesser : unterer Durchmesser				
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Astfrei	$\frac{1}{3}$	+ 2,51	+ 1,65	+ 0,84	+ 0,39	+ 0,09
Beastet	$\frac{2}{3}$	- 1,71	- 1,00	- 0,54	- 0,21	- 0,05
Beastet	1,0	- 3,70	- 2,08	- 1,04	- 0,41	- 0,09

Die Tabelle zeigt auf den ersten Blick zwei bemerkenswerte Tatsachen auf:

1. Im astfreien Schafte sind die Fehler stets positiv, d. h. die Mittenflächenformel gibt den Inhalt zu groß an, im beasteten Teil stets negativ.
2. Bei kleinem Durchmesserverhältnis sind die Abweichungen unverhältnismäßig gering. Man wird also — besonders bei starken Stämmen — auch mit großen Sektionslängen genaue Resultate erwarten können.

### 3. Der Normalstamm.

Die ungeheure Mannigfaltigkeit, welche sich aus der Verschiedenheit von Stammlänge, Kronenform und Kronenprozent in der konkreten Stammform ergibt, macht es unmöglich, die Auswirkungen obiger Tafel auf alle möglichen Kombinationen zu untersuchen.

Es wurden daher typische Vertreter der einzelnen Stammformen ausgesucht — Normalstämme —, welche die zu untersuchenden Eigenschaften ohne störende Nebenerscheinungen besitzen.

Als reinste Form dieser Normalstämme wurden drei Stämme konstruiert — daher später als „Konstruktionsstämme“ bezeichnet —, welche den Einfluß der verschiedenen Kronenausformung unter sonst gleichen Verhältnissen zu studieren gestatten. Ihre Länge wurde mit 45 m, der Durchmesser in 30 m mit 30 cm angenommen. Kronenansatz in 30 m; Exponenten des beasteten Schafteiles  $n = 1,0, 0,8, 0,67$ .

Außer diesen drei Konstruktionsstämmen wurden — sozusagen als zweite Annäherung an die Wirklichkeit — fünf von den Normalstämmen in Guttenbergs „Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge“ ausgewählt und als Träger gleichen Biegungswiderstandes nachkonstruiert. Gegenüber den aus den Zeichnungen abgenommenen Werten Guttenbergs ergaben sich an den verglichenen Stellen als maximale Abweichungen  $\pm 4$  mm im astfreien Schafte und  $\pm 7$  mm in der Krone, worin auch die Ungenauigkeiten in der Maßabnahme enthalten sind. Die Differenzen sind jedenfalls so gering, daß man die nachkonstruierten Stämme auch noch weiterhin als typische Formenvertreter der Fichte im Hochgebirge bezeichnen kann. Die durch den Stammfuß hervorgerufene Verbreiterung blieb — wie bisher überall — vorläufig unbeachtet.

Tabelle 20.

Normalstämme.

Berech-nungs-daten	Konstruktionsstamm			Stärkeklasse				
	I	II	III	I stark	I schw.	II mittel	IV stark	IV schw.
	n = 1,0	0,8	0,67	0,78	0,75	0,67	0,80	1,00
a = 2,0	4,69	4,90	3,36	2,96	3,84	2,88	1,65	
h	d	d	d	d	d	d	d	d
0	57,4	53,9	51,3	45,1	28,4	32,4	30,5	18,9
1	56,8	53,4	50,8	44,6	28,0	32,0	29,8	18,4
2	56,3	52,9	50,4	44,1	27,6	31,5	29,1	17,9
3	55,7	52,4	49,9	43,6	27,2	31,0	28,3	17,4
4	55,1	51,8	49,4	43,1	26,8	30,5	27,5	16,9
5	54,5	51,3	48,9	42,5	26,4	29,9	26,6	16,3
6	53,9	50,7	48,4	41,9	25,9	29,4	25,7	15,7
7	53,3	50,2	47,9	41,3	25,4	28,9	24,7	15,0
8	52,6	49,6	47,4	40,7	25,0	28,3	23,6	14,3
9	52,0	49,0	46,8	40,1	24,5	27,7	22,4	13,5
10	51,3	48,4	46,3	39,4	24,0	27,1	21,1	12,5
11	50,6	47,8	45,7	38,7	23,4	26,4	19,7	11,3
12	49,9	47,1	45,1	38,0	22,8	25,7	18,2	9,9
13	49,2	46,5	44,5	37,3	22,2	25,0	16,7	8,2
14	48,4	45,8	43,9	36,6	21,6	24,2	15,2	6,6
15	47,6	45,1	43,3	35,8	20,9	23,4	13,7	5,0
16	46,8	44,4	42,6	35,0	20,2	22,5	12,1	3,3
17	46,0	43,7	42,0	34,1	19,4	21,5	10,5	1,6
18	45,1	42,9	41,3	33,2	18,5	20,4	8,8	0
19	44,2	42,1	40,6	32,3	17,6	19,2	7,0	
20	43,3	41,3	39,8	31,3	16,6	18,0	5,0	
21	42,3	40,4	39,0	30,2	15,4	16,7	2,9	
22	41,3	39,5	38,2	29,1	14,1	15,5	0	
23	40,2	38,5	37,4	27,8	12,7	14,2		
24	39,0	37,5	36,5	26,4	11,3	12,8		
25	37,8	36,5	35,6	24,9	9,9	11,3		
26	36,5	35,4	34,6	23,4	8,4	9,7		
27	35,1	34,2	33,6	21,8	6,8	8,0		
28	33,6	32,9	32,5	20,2	5,0	6,1		
29	31,9	31,5	31,3	18,6	2,9	3,8		
30	30,0	30,0	30,0	16,9	0	0		
31	28,0	28,4	28,6	15,3				
32	26,0	26,8	27,2	13,6				
33	24,0	25,1	25,8	11,8				
34	22,0	23,4	24,3	9,9				
35	20,0	21,7	22,8	7,9				
36	18,0	19,9	21,3	5,8				
37	16,0	18,1	19,7	3,4				
38	14,0	16,3	18,0	0				
39	12,0	14,4	16,2					
40	10,0	12,5	14,3					
41	8,0	10,5	12,3					
42	6,0	8,3	10,2					
43	4,0	6,0	7,8					
44	2,0	3,5	4,9					
45	0	0	0					

An diesen acht Stämmen (Tabelle 20) wurden nachstehende Untersuchungen ausgeführt:

1. Der astfreie Schaft wurde in Sektionen zu 1 m, 2 m, 4 m, 6 m, 8 m, 10 m sowie in seiner ganzen Länge nach der Mittenflächenformel kubiert. Bei jeder einzelnen Sektionslänge wurde aus dem Durchmesserverhältnis mit Hilfe der Tafel 19 der zu erwartende prozentuelle Fehler ermittelt und auf Grund dessen der absolute Fehlerbetrag der betreffenden Sektionslänge eingesetzt. Als Kontrolle der Richtigkeit diente, daß die Summen der Sektionsvolumina abzüglich der Summe aller Abweichungen stets den gleichen und genauen Wert des Inhaltes ergeben müßte. (Bis auf die aus den Abrundungen sich ergebenden Differenzen.) Zur Verdeutlichung möge der Rechnungsvorgang am Konstruktionsstamm I gezeigt werden (Tabelle 21).

Die Ergebnisse der in gleicher Weise durchgeföhrten Berechnungen an den übrigen Stämmen sind in nachstehender Tabelle 22 zusammengefaßt. Aus ihr ergibt sich:

- a) Die Kronenform besitzt keinen nennenswerten Einfluß auf den Fehler des astfreien Schaftes.
- b) Das Fehlerprozent nimmt mit zunehmendem Gesamtvolume ab, der absolute Fehlerbetrag nimmt dagegen zu.
- c) Der Fehler bleibt unter +0,1%, wenn der astfreie Schaft in 2 m langen Sektionen gemessen wird,  
der Fehler bleibt unter +0,2%, wenn der astfreie Schaft in vier gleich langen Sektionen gemessen wird;  
der Fehler bleibt unter +0,7%, wenn der astfreie Schaft in zwei gleich langen Sektionen gemessen wird;  
der Fehler bleibt unter +2,5%, wenn der astfreie Schaft aus Mittenstärke und Länge kubiert wird.

2. In derselben Art wie im astfreien Schaftteil wurde auch im Kronenteile die sektionsweise Kubierung durchgeföhrert.

Tabelle 23 zeigt eine Zusammenstellung der Ergebnisse. Aus ihr ist zu entnehmen:

- a) Der prozentuelle Fehler nimmt mit zunehmenden Kronenexponenten und mit abnehmender Gesamtmasse zu. Durch Kombination dieser beiden Elemente können verschiedene Ergebnisse entstehen, je nach dem, welcher Faktor überwiegt.
- b) Für den absoluten Fehlerbetrag läßt sich keine Regel aufstellen.

Ta-  
Konstruktions-

h	d	f	1 m			2 m			4 m		
			$\Sigma f$	$A\%$	$A$	$\Sigma f$	$A\%$	$A$	$\Sigma f$	$A\%$	$A$
0	57,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	56,8	2.533,88	—	0,002	0,05	—	—	—	—	—	—
2	56,3	2.489,47	—	0,002	0,05	5.023,35	0,003	0,15	5.023,35	0,003	0,15
3	55,7	2.436,69	—	0,002	0,05	—	—	—	—	—	—
4	55,1	2.384,48	—	0,002	0,05	4.821,17	0,004	0,19	—	—	—
5	54,5	2.332,83	—	0,002	0,05	—	—	—	—	—	—
6	53,9	2.281,75	—	0,002	0,05	4.614,58	0,004	0,18	9.434,60	0,005	0,47
7	53,3	2.231,23	—	0,002	0,04	—	—	—	—	—	—
8	52,6	2.173,01	—	0,002	0,04	4.404,24	0,005	0,21	—	—	—
9	52,0	2.123,72	—	0,002	0,04	—	—	—	—	—	—
10	51,3	2.066,92	—	0,002	0,04	4.190,64	0,005	0,21	8.593,44	0,010	0,86
11	50,6	2.010,90	—	0,003	0,06	—	—	—	—	—	—
12	49,9	1.955,65	—	0,003	0,06	3.966,55	0,005	0,20	—	—	—
13	49,2	1.901,17	—	0,003	0,06	—	—	—	—	—	—
14	48,4	1.839,84	—	0,003	0,06	3.741,01	0,006	0,22	7.713,64	0,012	0,93
15	47,6	1.779,52	—	0,003	0,05	—	—	—	—	—	—
16	46,8	1.720,21	—	0,003	0,05	3.499,73	0,006	0,21	—	—	—
17	46,0	1.661,90	—	0,003	0,05	—	—	—	—	—	—
18	45,1	1.597,51	—	0,004	0,06	3.259,41	0,007	0,23	6.764,20	0,026	1,76
19	44,2	1.534,39	—	0,004	0,06	—	—	—	—	—	—
20	43,3	1.472,54	—	0,004	0,06	3.006,93	0,008	0,24	—	—	—
21	42,3	1.405,31	—	0,004	0,06	—	—	—	—	—	—
22	41,3	1.339,65	—	0,004	0,05	2.744,96	0,009	0,25	5.755,68	0,063	3,62
23	40,2	1.269,23	—	0,005	0,06	—	—	—	—	—	—
24	39,0	1.194,59	—	0,005	0,06	2.463,82	0,010	0,27	—	—	—
25	37,8	1.122,21	—	0,005	0,06	—	—	—	—	—	—
26	36,5	1.046,35	—	0,008	0,08	2.168,56	0,014	0,30	4.633,60	0,110	5,10
27	35,1	967,62	—	0,012	0,12	—	—	—	—	—	—
28	33,6	886,68	—	0,016	0,14	1.854,30	0,043	0,78	—	—	—
29	31,9	799,23	—	0,021	0,17	—	—	—	—	—	—
30	30,0	706,86	—	0,028	0,20	1.506,09	0,100	1,51	3.371,80	0,300	10,12
Summe :		51.265,34	—	—	2,03	51.265,34	—	5,15	51.290,31	—	23,01

Ta-

Stamm	Länge m		1 m		2 m		4 m	
			$\Sigma_{10-000} f$	$A\%$	$\Sigma_{10-000} f$	$A\%$	$A$	$A\%$
Konstruktions-stamm I.	30	5,126331	2,03	0,004	5,15	0,010	23,01	0,045
I. II.	30	4,618957	1,47	0,003	5,38	0,012	16,39	0,039
I. III.	30	4,266328	1,65	0,004	3,95	0,009	13,53	0,032
I. Standortklasse, stark	24	2,628826	1,22	0,005	4,03	0,015	15,30	0,058
I. schwach.	21	0,881995	0,62	0,007	1,86	0,021	8,43	0,095
II. mittel	18	1,044831	0,61	0,006	2,05	0,020	7,77	0,074
IV. „ stark ...	10	0,531977	0,58	0,011	2,04	0,038	7,97	0,150
IV. schwach.	12	0,216190	0,48	0,022	1,78	0,082	6,56	0,303

**belle 21.**

## stamm I.

6 m			8 m			10 m			15 m	
$\Sigma f$	$\Delta \%$	$\Delta$	$\Sigma f$	$\Delta \%$	$\Delta$	$\Sigma f$	$\Delta \%$	$\Delta$		
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14.463,48	0,022	3,18	14.463,48	0,022	3,18	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	23.072,90	0,10	23,07	—	—
12.571,92	0,046	5,79	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	16.311,28	0,090	14,68	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10.499,16	0,089	9,35	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	17.498,60	0,23	40,20	—	—
—	—	—	12.527,60	0,21	26,32	—	—	—	—	—
8.234,88	0,19	15,64	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.562,90	0,50	27,78	8.055,84	0,70	56,30	10.842,80	0,88	95,50	—	—
51.332,34	—	61,74	51.358,20	—	100,48	51.414,30	—	158,77	—	—

**belle 22.**

6 m		8 m		10 m		12 m		15 m		30 m	
$\Delta$	$\Delta \%$										
61,74	0,120	100,48	0,196	158,77	0,310	217,58	0,424	349,5	0,682	1207	2,30
46,13	0,100	66,89	0,145	121,94	0,265	—	—	—	—	993	2,07
35,64	0,084	53,64	0,126	104,28	0,245	—	—	—	—	765	1,80
24 m											
34,63	0,132	61,72	0,235	86,39	0,329	126,60	0,481	172,93	0,658	459	1,72
21 m											
18,00	0,204	29,55	0,336	49,77	0,564	65,55	0,743	—	—	189,5	2,10
18 m											
19,81	0,190	30,91	0,296	42,82	0,410	—	—	—	—	1487	1,40
16,63	0,313	—	—	47,80	0,890	—	—	—	—	—	
14,95	0,692	—	—	—	—	51,20	2,30	—	—		

Ta-

Stamm	Länge m		1 m		2 m	
			$\Delta_{10^{-3}}$	$\Delta \%$	$\Delta$	$\Delta \%$
Konstruktionsstamm I .	15	0,319247	3,17	0,09	12,16	0,38
II .	15	0,373569	2,25	0,06	8,23	0,21
III .	15	0,416942	1,58	0,04	5,31	0,13
I. Standortklasse, stark .	14	0,270846	1,71	0,06	6,50	0,24
I. schwach .	9	0,057882	0,74	0,13	3,19	0,55
II. mittel .	12	0,150476	0,76	0,05	2,60	0,17
IV. stark .	12	0,144117	1,17	0,08	4,49	0,31
IV. schwach .	6	0,011784	0,62	0,53	2,25	1,91

- c) Der Fehler bleibt unter  $-1,0\%$  der Kronenschaftsmasse, wenn der Stamm in vier gleich langen Sektionen gemessen wird;
- der Fehler bleibt unter  $-3,0\%$  der Kronenschaftsmasse, wenn der Stamm in zwei gleich langen Sektionen gemessen wird;
- der Fehler bleibt unter  $-33,3\%$  der Kronenschaftsmasse, wenn der Stamm aus Mittenstärke und Länge gemessen wird.

3. Durch Zusammenfassung der Messungen am astfreien und beasteten Schaftteil wurden die Ergebnisse für den ganzen Stamm erhalten. Aus der folgenden Tabelle 24 geht hervor:

- a) Das Fehlerprozent und der absolute Fehlerwert sind geringer als bei getrennter Kubierung, was ja zu erwarten war, da die Fehler im beasteten und im astfreien Schaftteile stets entgegengesetzte Vorzeichen haben.
- b) Bei Kubierung in mehr als zwei Sektionen überwiegt der Einfluß der Krone, wir erhalten zu geringe Massen, ausgenommen ganz extreme Verhältnisse (Konstruktionsstamm III) mit kurzen, vollholzigen Kronen.
- c) Bei Kubierung in zwei Sektionen (astfreier Schaft und Krone) überwiegt der Einfluß des Schaftes, wir erhalten zu große Massen, ausgenommen Stämme mit langen, abholzigen Kronen.
- d) In gleicher Weise verhalten sich die ganzen Stämme. Bezuglich IV Standortklasse, starke Stammklasse vgl. S. 59.

**belle 23.**

4 m		6 m		8 m		ganze	Länge
$\Delta$	$\Delta\%$	$\Delta$	$\Delta\%$	$\Delta$	$\Delta\%$	$\Delta$	$\Delta\%$
45,28	1,42	102,54	3,21	168,30	5,28	693,50	28,00
29,88	0,80	64,04	1,72	114,90	3,08	473,00	14,50
17,20	0,41	35,80	0,86	60,13	1,44	254,50	6,50
27,64	1,02	56,13	2,07	79,60	2,94	330,00	13,80
12,84	2,32	—	—	56,10	9,70	56,10	9,70
9,73	0,65	20,55	1,36	—	—	92,10	6,50
16,56	1,15	37,59	2,61	—	—	165,80	13,10
9,24	7,83	—	—	—	—	17,20	17,50

4. Bei der Vornahme tatsächlicher Messungen wird es aber nicht möglich sein, eine scharfe Trennung von beasteten und astfreien Schaftteilen zu erzielen. Es wird daher immer Sektionen geben, die über den Kronenansatz hinübergreifen und deren durch die bisherigen Berechnungen nicht erfaßter Fehler das Gesamtergebnis besonders dann stark beeinflußt, wenn die Sektionslänge ziemlich groß gewählt wurde.

Es wurden daher an allen Normalstämmen Untersuchungen über das Verhalten der Abweichungen gemacht, wenn die Sektionslänge den Kronenansatz übergreift. Die gewählten Sektionslängen betrugen: 2 m, 4 m, 6 m, 8 m, 10 m, 12 m, 15 m.

Tabelle 25 zeigt das Verhalten der tatsächlichen Abweichungen gegenüber den berechneten bei den Konstruktionsstämmen I und III. Dazu ist zu bemerken: die Zahlen der ersten Spalte (bis 0, 1 usw.) geben an, um wieviel Meter das obere Ende der Sektionslänge über dem Kronenansatz liegt. In die zweite Spalte wurden die aus der Tabelle 19 abgenommenen Abweichungen eingetragen, u. zw. die für den astfreien Schaftteil solange, als der abgegriffene Durchmesser in diesem lag, dann die für den beasteten gültigen (verschieden nach dem Kronenprozente des betreffenden Stammes). Fiel ein Durchmesser gerade in die Trennungsstelle zwischen astfreiem Schaft und Krone, dann wurden beide Zahlen eingesetzt. In die dritte Kolonne wurden die tatsächlichen prozentuellen Fehler eingesetzt. Kleine Ungenauigkeiten sind aus Abrundungsdifferenzen erklärliech.

Da die übrigen Normalstämme ein vollkommenes konformes Bild zeigen, wurde von einer Veröffentlichung der Untersuchungsergebnisse abgesehen.

Tabelle 24.

Stamm	Länge m	m <sup>3</sup>	1 m		2 m		4 m		6 m	
			Δ 1/ <sub>10.000</sub>	Δ %	Δ	Δ %	Δ	Δ %	Δ	Δ %
Konstruktionsstamm I . . . . .	45	5,445578	-1,14	-0,002	-7,01	-0,013	-22,27	-0,041	-40,80	-0,075
II . . . . .	45	4,992526	-0,78	-0,002	-2,85	-0,006	-13,27	-0,027	-17,91	-0,036
III . . . . .	45	4,683270	+0,07	0	-1,36	-0,003	-3,67	-0,008	-0,16	0
I. Standortklasse, stark . . . . .	38	2,899672	-0,49	-0,002	-2,47	-0,009	-12,34	-0,043	-21,50	-0,074
I. schwach . . . . .	30	1,939877	-0,12	-0,001	-1,33	-0,014	-4,41	-0,047	-1,60	-0,002
II. mittel . . . . .	30	1,195307	-0,15	-0,001	-0,55	-0,005	-1,96	-0,016	-0,74	-0,006
IV. stark . . . . .	22	0,676094	-0,59	-0,009	-2,45	-0,036	-8,59	-0,127	-20,96	-0,310
IV. schwach . . . . .	18	0,227974	-0,14	-0,006	-0,47	-0,021	-1,68	-0,117	-2,25	-0,099

Stamm	Länge m	m <sup>3</sup>	10 m		Krone und Schaft		Derbholz		ganzer Stamm	
			Δ	Δ %	Δ	Δ %	Δ	Δ %	Δ	Δ %
Konstruktionsstamm I . . . . .	45	5,445578	-98,43	-0,181	+513,50	+0,943	+3205,91	+5,93	+2939,58	+5,12
II . . . . .	45	4,992526	-26,73	-0,053	+470,00	+0,940	+2766,35	+5,55	+2645,50	+5,30
III . . . . .	45	4,683270	+23,58	+0,050	+510,50	+1,089	+2467,60	+5,27	+2549,82	+5,44
I. Standortklasse, stark . . . . .	38	2,899672	-41,96	-0,145	+129,00	+0,445	+1338,28	+4,62	+1321,08	+4,57
I. schwach . . . . .	30	1,939877	-17,05	-0,181	+133,40	+1,427	+459,30	+4,92	+550,26	+5,85
II. mittel . . . . .	30	1,195307	-7,06	-0,059	+56,60	+0,473	+506,61	+4,25	+518,38	+4,33
IV. stark . . . . .	22	0,676094	-70,03	-1,035	-118,00	-1,746	-90,87	-1,35	-359,93	-5,32
IV. schwach . . . . .	18	0,227974	-28,97	-1,226	+34,00	+1,503	+82,03	+3,70	+153,64	+6,73

Tabelle 25.

h	Konstruktionsstamm I, n=1,0													
	15 m		12 m		10 m		8 m		6 m		4 m		2 m	
	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.
bis 0	+ 1,5	+ 1,5	+ 1,2	+ 1,2	+1,0	+1,0	+0,8	+0,8	+0,6	+0,6	+0,3	+0,3	+0,1	+0,1
1	+ 1,8	+ 1,7	+ 1,5	+ 1,4	+1,2	+1,2	+1,0	+1,0	+0,7	+0,7	+0,4 +0,5	+0,1	+0,1 -0,1	0
2	+ 2,1	+ 2,0	+ 1,8	+ 1,7	+1,5	+1,5	+1,2	+1,0	+0,8	+0,2	-0,6	+0,2	-0,2	-0,2
3	+ 2,4	+ 2,2	+ 2,1	+ 1,8	+1,8	+1,3	+1,5	+0,3	+1,0 -1,3	-0,5	-0,7	-0,4		
4	+ 2,7	+ 2,3	+ 2,4	+ 1,4	+2,1	+0,3	+1,7 -2,3	-0,8	-1,5	-1,2	-0,8	-0,8		
5	+ 2,9	+ 2,1	+ 2,7	+ 0,2	+2,4 -4,2	-1,2	-2,7	-2,0	-1,9	-1,6				
6	+ 3,2	+ 0,9	+ 3,0 -4,8	- 1,7	-5,0	-4,5	-3,3	-3,0	-2,3	-2,3				
7	+ 3,6 -7,0	- 1,3	- 6,1	- 3,9	-6,0	-6,0	-3,9	-3,8						
8	- 8,5	- 4,2	- 7,5	- 6,1	-7,3	-7,3	-4,6	-4,6						
9	-10,3	- 7,3	- 8,8	- 8,3	-9,0	-9,0								
10	-12,2	-10,6	-10,8	-10,5										
11	-15,0	-14,1	-13,4	-13,0										
12	-18,5	-18,1	-16,0	-16,0										
13	-23,5	-23,1												
14	-29,0	-29,0												

### Tabelle 26.

Die angestellten Vergleiche ergeben, daß der tatsächliche Fehler im allgemeinen kleiner ist als der tabellenmäßig ermittelte. Eine Ausnahme machen nur die Stämme mit extrem vollholzigen Kronen, doch ist die Erhöhung des Fehlers auch hier praktisch unwesentlich, so daß wir bei tatsächlichen Messungen allgemein das Überschreiten des Kronenansatzes von einer Sektionslänge außer acht lassen dürfen.

Es gilt somit auch für jene Sektionen, welche den Kronenansatz überschreiten, die Regel: Fällt der Mittendurchmesser in den astfreien Schaftteil, dann wird der Inhalt zu groß angegeben, fällt er in den beasteten, dann wird er zu klein angegeben, mit dem Zusatz: Fällt er in die nächste Nähe des Kronenansatzes, dann ist der Fehler unwesentlich.

Als Beweis für die Richtigkeit dieser Regel können auch die Abweichungen S. 55 bei der Kubierung ganzer Stämme aus Mittenstärke und Länge gelten. Beim Normalstamm der IV Standortklasse (Starke Stammklasse) fällt der Mittendurchmesser in die Krone, daher negativer Fehler. Beim Derbholz des gleichen Stammes fällt er beinahe mit dem Kronenansatz zusammen, daher nur kleiner Fehler. Bei allen übrigen Stämmen fällt der Mittendurchmesser in den astfreien Schaftteil, weshalb sich auch durchwegs zu große Inhalte ergeben.

#### 4. Abweichungen des wirklichen Stammes vom Normalstamme.

Die Normalstämme wurden nur zu Studienzwecken konstruiert. Die wirklichen Stämme weisen zweierlei Abweichungen von ihnen auf:

1. Durchmesserschwankungen, welche den Betrag von  $\pm 10$  mm fast niemals überschreiten. Diese Abweichungen mögen als „Formelfehler“ bezeichnet werden, da sie ihre Ursache in den Abweichungen der Formelangabe gegenüber den konkreten Wachstumsverhältnissen haben.

2. Die stets einseitig wirkende Massenvergrößerung durch das Vorhandensein eines Stammfußes. Infolge der schwierigen mathematischen Erfassung wird die Frage an dieser Stelle sehr summarisch behandelt.

3. Der Einfachheit halber sollen hier auch die Messungs- und Abrundungsfehler mit berücksichtigt werden, da sich ja auch diese beim Vergleich wirklicher Stämme mit den Berechnungen auswirken.

Da die unter 1 und 3 angeführten Formel- und Messungsfehler bald positiv, bald negativ und im Verhältnis zu den Durchmesserwerten ziemlich klein sind, können beide als Beobachtungsfehler im Sinne der Ausgleichsrechnung behandelt werden.

Nun gehen aber die Formelfehler nicht genau parallel mit den Meßfehlern, denn erstere bedingen das tatsächliche Vorhandensein des gemessenen Durchmessers und damit auch eine tatsächliche Massenänderung, während das bei den Meßfehlern nicht der Fall ist.

Auf welche Länge sich die Massenänderung auswirkt, das läßt sich zwar im Einzelfalle bei genauer Vermessung des Stammes sagen, kann aber nicht verallgemeinert werden. Jedenfalls sind Abweichungen zwischen der tatsächlichen Stammform und der berechneten, die sich nur auf wenige Zentimeter Länge erstrecken, ohneweiters mit freiem Auge als Höcker oder Gruben zu erkennen.

Solche Stellen können bei der Messung vermieden werden. Erfahrungsgemäß kann man sagen, daß sich Formfehler, die am Stamme nicht mehr mit freiem Auge erkennbar sind, auf mindestens 1 m Länge erstrecken müssen. Wir hätten somit bei einer Sektionslänge von 1 m gar keine Formelfehler zu berücksichtigen, bei 2 m Sektionslänge nur Formelfehler für 1 m, bei 3 m für 2 m usw.

Die Berechnungen beziehen sich auf einen Zylinder oder auf ein apollonisches Paraboloid. Die Abweichungen der Metzgerschen Stammformen von den der Mittenflächenformel zugrunde liegenden müssen nach Berücksichtigung obiger Fehler in Anschlag gebracht werden.

In den folgenden beiden Tabellen sind die zu erwartenden Fehler zusammengestellt. Als Messungsfehler wurden Abweichungen von  $\pm 1$  mm und  $\pm 5$  mm eingesetzt, wie sie etwa bei Messungen auf 1 mm bzw. 10 mm erreicht werden. Als Formelfehler wurden  $\pm 10$  mm in Anschlag gebracht.

**Tabelle 27.**

Fehlerprozent infolge Meß-Ungenauigkeiten.

d in cm	5	10	15	20	25	30	40	50
$\Delta_{1\%}$ bei d $\pm 1$ mm	$\pm 4,04$	$\pm 2,01$	$\pm 1,34$	$\pm 1,00$	$\pm 0,80$	$\pm 0,67$	$\pm 0,50$	$\pm 0,40$
$\Delta_{5\%}$ bei d $\pm 5$ mm	$\pm 21,00$	$\pm 10,25$	$\pm 6,79$	$\pm 5,06$	$\pm 4,04$	$\pm 3,26$	$\pm 2,52$	$\pm 2,01$

### Fehlerprozent infolge Formel-Ungenauigkeiten.

d in cm	5	10	15	20	25	30	40	50	
Sektionslängen in m	2	± 22,0	± 10,5	± 6,9	± 5,1	± 4,1	± 3,4	± 2,5	± 2,0
	4	± 33,0	± 15,7	± 10,3	± 7,7	± 6,1	± 5,1	± 3,8	± 3,0
	6	± 36,6	± 17,5	± 11,5	± 8,5	± 6,8	± 5,6	± 4,2	± 3,4
	8	± 38,5	± 18,4	± 12,1	± 9,0	± 7,1	± 5,9	± 4,4	± 3,5
	10	± 39,6	± 18,9	± 12,4	± 9,2	± 7,3	± 6,1	± 4,5	± 3,6
	20	± 41,8	± 20,0	± 13,1	± 9,7	± 7,7	± 6,4	± 4,8	± 3,8
	30	± 42,5	± 20,3	± 13,3	± 9,9	± 7,9	± 6,5	± 4,9	± 3,9
	40	± 42,8	± 20,5	± 13,4	± 10,0	± 8,0	± 6,6	± 4,9	± 3,9

Diese beiden Fehlertabellen gelten nur für die Messung eines einzelnen Stammstückes aus Mittenstärke und Länge. Werden — was ja zumeist zutreffen wird — viele Stammstücke gemessen, dann werden nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an den einzelnen Stämmen als wahrscheinlicher Fehler nur zwei Drittel des errechneten zu erwarten sein. Da aber Formel- und Meßfehler nebeneinander in allen möglichen Vorzeichenkombinationen auftreten, wird bei einer größeren Anzahl von Einzelmessungen (z. B. bei Sägeblochen) ein mittlerer Fehler der Einzelbeobachtung  $\pm \frac{2}{3} \sqrt{f_f^2 + f_m^2}$  zu erwarten sein ( $f_f$  = Formelfehler,  $f_m$  = Meßfehler).

Auf Grund dieser Überlegung wurde die nachstehende Tabelle 28 errechnet.

**Tabelle 28.**

Fehlerprozent zur Kubierung von Stammabschnitten.

	2 m					4 m				
	5 cm	10	15	25	40	5	10	15	25	40
Meßgen. ± 1mm	± 14,7	± 7,1	± 4,7	± 2,8	± 1,7	± 22,2	± 10,5	± 6,9	± 4,1	± 2,6
Meßgen. ± 5mm	± 20,3	± 9,8	± 6,5	± 3,8	± 2,4	± 26,1	± 12,5	± 8,2	± 4,9	± 3,0
	6 m					10 m				
	5 cm	10	15	25	40	5	10	15	25	40
Meßgen. ± 1mm	± 24,6	± 11,7	± 7,7	± 4,6	± 2,8	± 26,6	± 12,7	± 8,3	± 4,8	± 3,0
Meßgen. ± 5mm	± 28,0	± 13,5	± 8,9	± 5,3	± 3,3	± 29,9	± 14,7	± 9,4	± 5,5	± 3,4
	20 m					40 m				
	5 cm	10	15	25	40	5	10	15	25	40
Meßgen. ± 1mm	± 28,0	± 13,4	± 8,8	± 5,2	± 3,2	± 28,7	± 13,5	± 8,9	± 5,4	± 3,3
Meßgen. ± 5mm	± 31,2	± 15,0	± 9,8	± 5,8	± 3,6	± 31,8	± 15,3	± 10,1	± 6,0	± 3,7

Vergleicht man diese Fehler mit den prinzipiellen Abweichungen der Mittenflächenformel, dann ergibt sich:

1. Für 4—6 m langes Sägholz kann der prinzipielle Fehler vernachlässigt werden, da er nur etwa  $1/25$  des Formel- und Meßfehlers beträgt. Vom Vorzeichen abgesehen, würden beide Fehler erst dann gleich groß werden, wenn  $25^2 = 625$  Stämme gemessen würden.

2. Die Verringerung des Meßfehlers von  $\pm 5$  mm auf  $\pm 1$  mm erzeugt nur bei kurzen Stammstücken eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit, bei längeren steht sie in keinem Verhältnis zum Mehraufwand an Zeit und Arbeit.

3. Da Rechenschieberrechnungen einen Fehler von  $\pm 0,2\%$  in der Quadratteilung aufweisen, können selbst die genauesten Massenberechnungen mit dem Rechenschieber vorgenommen werden. Für Kubierungstabellen genügen bei Einzelmessungen drei Stellen, bei einer größeren Zahl sogar zwei Stellen.

Bei Berechnung des Fehlers einer Summe von Einzelmessungen aus Mittenstärke und Länge, deren jede mit einem Fehler von  $\pm v$  behaftet ist, wird man als Fehler der Summe  $\pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$  erwarten dürfen.

Es kann sich dabei um wirklich vorhandene Einzelstücke oder um die sektionsweise Kubierung eines Stückes handeln.

Zum Studium der Auswirkungen der Formel- bzw. Meßfehler auf die sektionsweise Kubierung ganzer Stämme wurden wieder die Normalstämme herangezogen.

Sie wurden in Sektionen von 1 m, 2 m, 4 m, 6 m, 10 m sowie astfreier Schaft und Kronenteil und auch als ganzer Stamm nach Mitten-durchmesser und Länge kubiert. Mit Hilfe der Tafel 28 wurde aus der betreffenden Mittenstärke und Sektionslänge das zu erwartende Fehlerprozent bestimmt; aus diesem und der Sektionsmasse wurde der absolute Massenfehler  $v$  und durch Quadrieren das zugehörige Fehlerquadrat  $v^2$  ermittelt. Die Quadratwurzel aus  $\Sigma v^2$  ergab dann den zu erwartenden Massenfehler des Stammes bzw. bei Teilung durch die Stammmasse das zugehörige Fehlerprozent.

In dieser Weise wurden die zu erwartenden Fehler an den acht Normalstämmen bei einer Meßgenauigkeit von  $\pm 1$  mm und  $\pm 5$  mm berechnet.

Das Resultat dieser Berechnungen ist in der nachfolgenden Tabelle 29 zusammengestellt worden. Unter die Formel- bzw. Meßfehler wurden — mit Theorie bezeichnet — die aus den prinzipiellen Abweichungen der Mittenflächenformel von der Metzgerschen Stammform sich

ergebenden Fehler nach Tabelle 24 eingesetzt. Durch algebraische Summierung ergeben sich die Fehlergrenzen, die in die 3. und 4. Reihe eingesetzt wurden.

Aus dieser Fehlertafel ergibt sich:

1. Die Verkürzung der Sektionslänge ist viel einflußreicher auf die Herabminderung des Fehlers als die Vergrößerung der Meßgenauigkeit.

2. Eine Meßgenauigkeit von  $\pm 1$  mm ist nur von Wert bei einer Sektionslänge von 1 bis 2 m.

3. Ein Fehler von  $\pm 3\%$  wird im allgemeinen nicht überschritten, wenn der Stamm in vier Sektionen gemessen wird; Meßgenauigkeit  $\pm 5$  mm. Der theoretische Fehler kann unberücksichtigt bleiben.

4. Die Kubierung einzelner Stämme aus Mittenstärke und Länge ist zu verwerfen, da mit Abweichungen von über  $\pm 10\%$  gerechnet werden muß.

Die Massenvermehrung, welche sich aus dem Vorhandensein des Stammfußes ergibt, konnte ich auf Grund statischer Gesetze nicht berechnen, da die maßgebenden Bedingungen hiefür nur schwer erfaßbar und so stark veränderlich sind, daß es kaum möglich sein wird, hier auf induktivem Wege Brauchbares zu erreichen.

Es wurde daher auf Grund von 80 Stammanalysen diese Massenvermehrung berechnet und versucht, eine Abhängigkeit zwischen dieser Vermehrung und der Stammlänge bzw. der Stammmasse zu finden.

Das Untersuchungsmaterial hiefür wurde mir von der Forstlichen Bundesversuchsanstalt in Mariabrunn in entgegenkommendster Weise zur Verfügung gestellt, wofür ihr auch an dieser Stelle wärmstens gedankt sei.

Es bestand in der sektionsweisen Aufnahme von 80 Fichten in 1 m langen Sektionen. 60 Stämme stammten aus Nordtirol, u. zw. 30 mit niedrigen Brusthöhenformzahlen und 30 mit hohen. 20 Stämme stammen aus dem Wiener Walde, sie sind schwächer; die ersten 10 haben niedrige, die letzten hohe Formzahlen.

Die Bestimmung der Massenvermehrung durch den Stammfuß erfolgt in der Weise, daß zuerst der Inhalt des untersten, 4 m langen Stammstückes mit 1 m langen Sektionen gemessen und dann die Massenvermehrung gegenüber der Messung in zwei 2 m bzw. in einer 4 m langen Sektion festgelegt wurde. Schließlich wurde das unterste 10 m lange Stück in zehn 1 m langen Sektionen bzw. aus Mittenstärke

Ta-

## Fehlerprozenttabelle zur

Bezeichnung	Abweichung	Sektions-			
		1 m		2 m	
		± 1 mm	± 5 mm	± 1 mm	± 5 mm
Konstruktionsstamm I	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,053 — 0,002	0,26 — 0,002	0,35 — 0,013	0,56 — 0,013
	Grenzen . +	0,051 0,055	0,26 0,26	0,34 0,36	0,55 0,57
	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,056 0	0,26 0	0,39 — 0,003	0,53 — 0,003
	Grenzen +	0,056 0,056	0,26 0,26	0,39 0,39	0,53 0,53
I. Standortklasse stark	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,066 — 0,002	0,35 — 0,002	0,51 — 0,009	0,69 — 0,009
	Grenzen .. +	0,064 0,068	0,35 0,35	0,50 0,52	0,68 0,70
	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,107 — 0,001	0,60 — 0,001	0,87 — 0,014	1,17 — 0,014
I. Standortklasse schwach	Grenzen .. +	0,106 0,108	0,60 0,60	0,86 0,88	1,16 1,18
	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,101 — 0,001	0,54 — 0,001	0,77 — 0,005	1,07 — 0,005
	Grenzen .. +	0,100 0,102	0,54 0,54	0,77 0,77	1,07 1,07
II. Standortklasse mittel	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,127 — 0,009	0,71 — 0,009	1,02 — 0,036	1,51 — 0,036
	Grenzen . +	0,118 0,136	0,70 0,72	0,98 1,06	1,47 1,55
	Formel u. Meßgen. ± Theorie	0,256 — 0,006	1,26 — 0,006	1,74 — 0,021	2,58 — 0,021
IV. Standortklasse schwach	Grenzen .. +	0,250 0,262	0,25 0,27	1,72 1,76	2,56 2,60

und Länge kubiert, um auf diese Weise die Massenvermehrung gegenüber einem oberhalb des Stammfußes gelegenen Mittendurchmesser zu bestimmen.

Die erhaltenen Abweichungen wurden nach der zugehörigen Schaftlänge bzw. Masse geordnet, ergaben aber keinerlei eindeutiges Bild. Ihre Ermittlung als Prozentsatz der Schaftmasse scheint noch das verlässlichste Bestimmungsverfahren zu sein.

Bei der Messung in 2 m-Sektionen ergab sich in der Summe ein Fehler von —0,87%, bei 4 m-Sektionen ein solcher von —2,21%.

**belle 29.****Kubierung ganzer Stämme.**

länge									
4 m		6 m		10 m		Schaft u. Krone		ganzer Stamm	
± 1 mm	± 5 mm	± 1 mm	± 5 mm	± 1 mm	± 5 mm	± 1 mm	± 5 mm	± 1 mm	± 5 mm
0,76	0,88	1,01	1,23	1,42	1,66	2,50	3,06	3,30	3,60
-0,041	-0,041	-0,075	-0,075	-0,181	-0,181	+ 0,943	+ 0,943	+ 5,12	+ 5,12
0,72	0,84	0,94	1,16	1,24	1,48	1,56	2,12	8,42	8,72
0,80	0,92	1,08	1,30	1,60	1,84	3,44	4,00	+ 1,82	+ 1,52
0,84	0,97	1,21	1,31	1,62	1,75	2,99	3,17	3,60	4,00
-0,008	-0,008	0	0	+ 0,05	+ 0,05	+ 1,089	+ 1,089	+ 5,44	+ 5,44
0,83	0,96	1,21	1,31	1,57	1,70	4,08	4,26	9,04	9,44
0,85	0,98	1,21	1,31	1,67	1,80	1,90	2,08	1,84	1,44
1,09	1,19	1,44	1,69	1,78	2,52	3,12	3,57	4,20	4,90
-0,043	-0,043	-0,074	-0,074	-0,145	-0,145	+ 0,445	+ 0,445	+ 4,57	+ 4,57
1,05	1,15	1,37	1,62	1,64	2,38	3,56	4,01	8,77	9,47
1,13	1,23	1,51	1,76	1,92	2,66	2,68	3,13	+ 0,37	-0,33
1,77	2,15	2,42	2,81	3,31	3,83	5,23	5,78	6,50	7,20
-0,047	-0,047	-0,002	-0,002	-0,181	-0,181	+ 1,427	+ 1,427	+ 5,85	+ 5,85
1,72	2,10	2,42	2,81	3,13	3,65	6,66	7,21	12,35	13,05
1,82	2,20	2,42	2,81	3,49	4,01	3,80	4,35	0,65	1,35
1,52	1,87	2,24	2,69	2,98	3,53	4,28	4,83	5,80	6,40
-0,016	-0,016	-0,006	-0,006	-0,059	-0,059	+ 0,473	+ 0,473	+ 4,33	+ 4,33
1,50	1,85	2,23	2,68	2,92	3,47	4,75	5,30	10,13	10,73
1,54	1,89	2,25	2,70	3,04	3,59	3,81	4,36	1,47	2,07
1,99	2,32	2,74	3,11	4,02	4,73	4,02	4,73	6,90	7,30
-0,127	-0,127	-0,310	-0,310	-1,035	-1,035	-1,746	-1,746	-5,32	-5,32
1,86	2,19	2,43	2,80	2,99	3,70	2,27	2,98	1,58	1,98
2,12	2,45	3,05	3,42	5,05	5,76	5,77	6,48	12,22	12,62
3,76	4,50	5,21	5,88	—	—	7,65	8,70	9,80	10,90
-0,117	-0,117	-0,099	-0,099	-1,226	-1,226	+ 1,503	-1,503	+ 6,73	+ 6,73
3,64	4,38	5,11	5,78	—	—	9,15	10,20	16,53	17,63
3,88	4,62	5,31	5,98	—	—	6,15	7,20	3,13	4,17

bei 10 m Länge —2,42%. Im Einzelfalle sind die Abweichungen vom Mittelwerte ziemlich groß; so schwankt der Fehler bei Messung der 4 m-Stücke zwischen +1% und —6%.

Aus dem Vorhandensein des Stammfußes erklärt sich auch, daß bei den bisher gemachten Untersuchungen bei kurzen Stammstücken ein negativer Fehler, bei ganzen Stämmen dagegen ein positiver Fehler gefunden wurde. Es überwiegt nämlich zuerst der Einfluß des Stammfußes, dann aber der Einfluß der prinzipiellen Abweichungen der Mittenflächenformel.

## II. PRAKTISCHE UNTERSUCHUNGEN.

Das von der Versuchsanstalt zur Verfügung gestellte Material wurde in Sektionen von 1 m, 2 m, 4 m und 10 m sowie aus Mittenstärke und Länge kubiert.

Damit für die einzelnen Sektionen die Originalmessungen verwendet werden konnten, wurde das unterste 0,5 m lange Stammstück nicht mitgerechnet. Um eine bessere praktische Verwertung der Berechnungen zu gewährleisten, wurde nur das Derbholz über 7 cm berücksichtigt. Nachträgliche Versuche zeigten aber, daß bei Kubierung der ganzen Schaftmaße keine wesentlichen Änderungen zu erwarten gewesen wären.

Eine besondere Behandlung verlangte der Stammfuß, da seine Einbeziehung in die Genauigkeitsberechnung den Vergleich mit den auf Grund theoretischer Überlegungen gewonnenen Fehlertafeln sehr erschwert hätte. Als verhältnismäßig unschädlichste Methode, die Massenvermehrung im Stammfuß auszuschalten, wurden die bei der Berechnung dieser Abweichungen im vorigen Abschnitte erhaltenen Fehlerprozenten unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen bei jedem Stämme addiert. Hierdurch wurden die Endergebnisse besonders bei größerer Sektionslänge günstig beeinflußt, in einzelnen Fällen wurden jedoch auch die Fehler vergrößert.

Bei jenen Stämmen, welche kürzer als 20 m waren, wurden bei den 10 m-Sektionen die Stammfußfehler der 4 m-Sektionen in Anschlag gebracht, weil sonst ein allzu günstiges Resultat entstanden wäre. Trotzdem würde der Fehler bei den 10 m-Sektionen größer gewesen sein, wenn das Untersuchungsmaterial auf andere Weise vom Stammfuß hätte befreit werden können.

Bei der Kubierung der ganzen Stämme ist der gleiche Betrag für die Abweichungen des Stammfußes eingestellt worden wie bei den 10 m-Sektionen.

Nachstehende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung der errechneten Fehler. Nach der Theorie war als größter mittlerer Fehler der Einzeluntersuchungen zu erwarten:

bei einer Sektionslänge von .	2 m	± 1,0%,
	4 m	± 3,0%,
	10 m	+ 3 bis 5,0%.

Die berechneten Abweichungen bleiben mit wenigen Ausnahmen innerhalb ihrer theoretischen Grenzen. Auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung mußte jedoch von Haus aus mit Abweichungen

Tabelle 30.

Mittleres Fehlerprozent des Einzelstammes.

Stamm Nr.	Sektionslänge				Stamm Nr.	Sektionslänge			
	2 m	4 m	10 m	ganzer Stamm		2 m	4 m	10 m	ganzer Stamm
1	-- 0,1	+ 2,1	0	+ 4,7	41	+ 0,7	- 0,5	+ 1,5	+ 3,2
2	-- 0,2	+ 0,4	- 1,0	+ 9,5	42	+ 2,2	- 2,3	+ 1,3	+ 4,7
3	-- 0,2	- 1,5	- 2,4	- 1,3	43	- 0,7	+ 0,7	- 0,4	+ 2,4
4	-- 0,5	- 1,9	+ 2,1	+ 7,9	44	- 0,7	- 0,4	- 0,6	+ 9,5
5	-- 0,7	+ 2,1	- 1,1	+ 5,3	45	+ 0,2	- 0,3	+ 0,8	+ 9,3
6	-- 0,9	+ 0,4	- 0,6	+ 6,9	46	+ 4,1	- 3,9	+ 3,5	+ 8,2
7	+ 0,1	+ 0,1	- 1,8	+ 1,4	47	+ 1,7	- 0,4	- 0,4	+ 1,1
8	+ 1,1	+ 0,3	+ 0,6	+ 7,5	49	- 0,1	0	- 0,4	+ 6,6
9	-- 0,3	- 0,1	+ 1,9	+ 1,3	50	- 0,7	+ 1,8	+ 0,3	+ 6,4
10	-- 0,2	- 1,1	+ 0,1	+ 7,7	51	0	+ 2,1	- 2,0	+ 1,6
11	-- 1,4	- 1,2	+ 0,6	+ 2,6	52	- 0,7	+ 0,8	- 0,4	+ 1,8
12	+ 0,1	- 0,5	- 0,4	+ 2,2	53	+ 0,1	- 0,1	- 0,4	+ 4,8
13	+ 0,7	- 2,6	- 1,6	+ 9,1	55	+ 0,1	- 0,2	0	+ 4,8
14	-- 0,1	0	+ 0,7	+ 5,4	56	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,5	+ 8,2
15	+ 0,4	- 0,5	- 0,4	+ 7,9	57	+ 0,6	- 0,5	+ 0,5	+ 0,3
16	+ 0,6	- 0,8	+ 0,6	+ 1,4	58	- 0,4	+ 0,6	+ 0,4	+ 4,1
17	+ 1,0	- 1,2	+ 1,2	+ 2,5	59	+ 0,1	+ 0,6	+ 0,9	+ 6,2
18	+ 0,3	- 0,3	+ 0,2	+ 9,9	60	- 0,2	+ 1,2	0	+ 5,5
19	-- 1,0	0	- 1,6	+ 0,6	61	+ 0,3	+ 0,5	- 1,0	- 3,0
20	+ 0,1	- 0,3	- 1,7	+ 2,5	62	- 0,1	- 2,4	+ 0,4	+ 0,8
21	-- 0,3	0	- 0,7	+ 4,9	63	- 0,4	+ 0,3	+ 0,1	+ 1,2
22	+ 1,3	- 0,8	+ 0,2	+ 5,5	64	+ 0,5	+ 0,8	- 0,6	+ 8,2
23	0	- 0,1	+ 0,4	+ 4,9	65	+ 0,3	- 1,0	- 3,0	+ 6,7
24	-- 0,6	+ 1,3	0	+ 4,0	66	- 1,1	+ 1,9	+ 0,3	+ 0,3
25	+ 0,5	- 0,6	+ 0,9	+ 11,0	67	- 1,0	+ 0,8	- 3,7	- 0,7
26	-- 0,2	- 0,3	0	+ 8,5	68	+ 0,7	- 1,5	- 1,3	+ 2,9
27	+ 0,1	- 0,5	- 0,5	+ 8,6	69	- 0,5	+ 1,3	- 2,1	+ 1,3
28	-- 1,9	+ 0,7	- 0,1	+ 19,5	70	- 0,2	+ 0,4	- 0,9	+ 0,5
29	-- 0,5	+ 0,6	- 1,9	+ 5,7	71	+ 0,3	- 0,3	+ 8,1	- 1,1
30	-- 0,1	+ 1,7	+ 1,1	+ 7,8	72	+ 0,9	- 0,6	- 1,8	+ 11,5
31	+ 1,0	- 1,9	- 5,1	- 3,7	73	0	- 0,9	- 0,5	+ 1,9
32	-- 0,2	0	+ 1,0	+ 7,0	74	0	- 0,3	- 0,4	+ 5,2
33	+ 0,3	+ 2,9	- 1,8	+ 3,1	75	+ 0,9	- 0,9	+ 2,8	+ 4,0
34	-- 0,5	+ 0,5	- 0,5	+ 8,2	76	0	+ 2,4	+ 0,4	+ 7,6
35	+ 0,9	+ 0,5	+ 2,4	+ 8,1	77	- 0,6	+ 0,2	+ 0,8	- 1,3
36	+ 0,1	- 0,1	- 0,4	+ 3,9	78	- 0,7	+ 0,5	- 0,5	+ 4,9
37	+ 0,2	- 0,6	+ 0,4	+ 5,8	79	- 0,7	- 0,1	- 1,6	+ 4,5
38	0	- 0,4	0	+ 7,6	80	0	- 0,9	- 2,0	+ 9,8
39	+ 0,2	- 1,0	+ 0,9	+ 7,7					
40	+ 2,0	- 2,9	+ 1,0	- 6,3					

im ungefähren Betrag des dreifachen normalen Fehlers gerechnet werden. Stamm 46, der die größten Abweichungen von der Theorie zeigt, weist übrigens eine so abnorme Schaftausbildung auf, daß der große Fehler bei 2 m-Sektionen sofort begreiflich wird. Er mißt in

4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	m Höhe
260	257	240	254.	230	240	217	224	201	210	188	193	174	mm

Nach diesem Vergleich der Fehler beim Einzelstamm mit ihren theoretischen Werten wurden auch die Fehler der Summe aller Stämme dem Vergleich unterzogen.

Der auf Grund der theoretischen Überlegungen zu erwartende Fehler wurde auf nachstehende Art berechnet: Die untersuchten Fichten weisen einen mittleren Inhalt von 0,9 fm auf. Diesem entspricht von den Normalstämmen am besten I. Standortsklasse, schwache Stammklasse, und II. Standortsklasse, Mittelstamm. Das Mittel aus den Fehlern dieser beiden Normalstämmen wurde nun durch die Quadratwurzel aus der Zahl der untersuchten Stämme (78) dividiert und auf diese Weise der zu erwartende Fehler der Summe aller Stämme berechnet. Hiezu mußte dann der Fehler auf Grund der theoretischen Abweichungen der Mittenflächenformel (s. Tabelle 24) algebraisch addiert werden. Auf diese Weise wurden die Grenzwerte in der nachstehenden Tabelle 31 erhalten.

**Tabelle 31.**

Sektionslänge	2 m	4 m	10 m	ganzer Stamm
theoretische	+ 0,08 %	+ 0,14 %	+ 0,20 %	+ 5,70 %
Fehlergrenzen	— 0,10 %	— 0,22 %	— 0,60 %	— 4,30 %
Messung	+ 0,072 %	— 0,045 %	— 0,03 %	+ 5,39 %

In der letzten Reihe sind die Messungsergebnisse eingetragen, welche sich durchaus innerhalb der berechneten Grenzen halten.

Bezüglich Kubierung ganzer Stämme aus Mittelstärken und Länge ergibt sich, daß ein theoretischer Fehler von zirka +5% in Abzug gebracht werden muß, um die tatsächliche Kubatur zu erhalten.

### III. ZUSAMMENFASSUNG.

1. Da die Mittenflächenformel streng nur für den Zylinder und das apollonische Paraboloid gilt, sind bei Messung der Metzgerschen Stammformen Abweichungen zu erwarten. Diese sind im astfreien Schaftteile positiv — wir erhalten zu große Maße —, im beasteten negativ. Diese Tatsache deckt sich mit den Ergebnissen der Untersuchungen von Flury, wenn der negative Fehler des Stammfußes mit in Anschlag gebracht wird.

2. Die zu erwartenden „theoretischen“ Abweichungen sind aber so klein gegenüber denen aus Messungs- und Formfehler, daß sie bei Stammstücken bis zur Länge von einem Viertel des Stammes vernachlässigt werden können.

3. Enthält ein Stammstück sowohl einen Teil des beasteten als auch einen Teil des astfreien Schaftes, dann wird der Fehler kleiner, als er sich ergäbe, wenn das Schaftstück ganz dem beasteten oder astfreien Schaftteile angehören würde.

4. Die theoretische Genauigkeit der Mittenflächenformel ist so groß, daß wir sie infolge der vorhandenen Meß- bzw. Formelungengenauigkeiten bei Messung von Stämmen in mindestens vier Sektionen (oder von Stammstücken von einem Viertel der Gesamtlänge) gar nicht ausnützen können.

5. Die Verringerung des Meßfehlers von  $\pm 5$  mm auf  $\pm 1$  mm erzeugt nur bei kurzen Stammstücken (bzw. Sektionen) von 1 bis 2 m Länge eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit, was sich auf die Kubierung stehender Bäume mit Hilfe indirekt gemessener oberer Durchmesser vorteilhaft auswirkt.

6.. Die Verkürzung der Sektionslänge setzt den Fehler viel stärker herab als eine Vergrößerung der Meßgenauigkeit.

7. Die Kubierung einzelner Stämme aus Mittenstärke und Länge ist zu verwerfen, da der zu erwartende Fehler  $\pm 10\%$  überschreiten kann. Bei einer größeren Anzahl von Stämmen kann ein Fehler von  $\pm 5\%$  in Anschlag gebracht werden.

8. Die Massenvermehrung durch den Stammfuß beträgt bei 2 m-Sektionen etwa 0,9%, bei 4 m-Sektionen und darüber etwa 2,0% der Stammmasse.

9. Die auf induktivem Wege abgeleiteten Fehlergrößen stimmen mit den Vergleichen an Stammanalysen vollkommen überein. Es können somit die Fehlertafeln 28 und 29 zur Vorausbestimmung des zu erwartenden Fehlers verwendet werden.

10. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen wurden mit Messungen an der Fichte verglichen und bestätigt. Die Voraussetzungen dieser Arbeit lassen es aber wahrscheinlich erscheinen, daß die Ergebnisse sinngemäß auch auf alle anderen Holzarten übertragen werden können.

### b) Andere Formeln zur Messung von Stammabschnitten.

Von den für die Messung liegenden Holzes angegebenen Formeln sollen nur jene bekannteren untersucht werden, die sich mit 2–3 gemessenen Durchmessern begnügen. Das sind:

1. Smalian:  $v_1 = l \frac{(g_o + g_n)}{2}$ ,

$$2. \text{ Hoßfeld: } v_1 = \frac{1}{4} (3g_{\gamma_3} + g_n),$$

$$3. \text{ Newton-Riecke: } v_1 = \frac{1}{6} (g_o + 4g_i + g_v),$$

$$4. \text{ Gauß-Simony: } v_1 = \frac{1}{2} (g_{\gamma_3} + g_{\gamma_4}),$$

$$5. \text{ Schiffel: } v_1 = (0,61g_{\gamma_4} + 0,62g_{\gamma_3} - 0,23g_{\gamma_3} \cdot g_{\gamma_4}),$$

$$\gamma = \text{Mittendurchmesser}, q_{\gamma_1} = \frac{d_{\gamma_1}}{d_{\gamma_4}}.$$

Da alle diese Formeln mehr als einen gemessenen Durchmesser erfordern, während die Mittenflächenformel den Inhalt bekanntlich nur aus dem Produkt Mittenfläche  $\times$  Länge ermittelt, sind beim Vergleich der Genauigkeit zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es wird ein Stammstück durch einmalige Anwendung der verschiedenen Formeln (also nicht sektionsweise) kubiert, wobei je nach der Formel 1, 2 oder 3 Durchmesser gemessen werden.

2. Es wird die größere Anzahl gemessener Durchmesser mancher Formel dadurch wettgemacht, daß die anderen Formeln durch sektionsweise Kubierung öfters angewendet werden. Z. B. wird bei einer Formel mit einem gemessenen Durchmesser das Stammstück in 6 Sektionen, bei 2 Durchmessern in 3 Sektionen und bei 3 Durchmessern in 2 Sektionen geteilt. Hierbei verschwindet der Vorteil mehrerer Durchmesser und es ist nur die bessere oder schlechtere Anpassung der Formel an die Schaftform ausschlaggebend. Gerade sie ist aber von Interesse.

Um diese Vergleiche durchführen zu können, ist es vor allem nötig, die Abweichungen dieser Formeln von den „Metzgerschen Stammformen“ zu berechnen.

Der Inhalt des astfreien Schafteiles ist

$$v_o = \frac{3\pi}{20} l \left( \frac{d_o^5 - d_n^5}{d_o^3 - d_n^3} \right) \quad d_o = \text{unterer Durchmesser} \\ d_n = \text{oberer Durchmesser}$$

Der Inhalt des beasteten Schafteiles schwankt je nach der Kronenform zwischen:

$$v_o = \frac{3\pi}{28} l \left( \frac{\frac{7}{2} \left( \frac{d_o^{\frac{7}{2}} - d_n^{\frac{7}{2}}}{d_o^{\frac{3}{2}} - d_n^{\frac{3}{2}}} \right)}{\frac{3}{2}} \right) \quad \text{und} \quad v_o = \frac{\pi}{12} l \left( \frac{d_o^3 - d_n^3}{d_o - d_n} \right)^2$$

Der Berechnungsvorgang war in jedem Falle so, daß das Fehlerprozent  $\Delta \% = 100 \frac{v_1 - v_o}{v_1}$  ermittelt wurde, wobei angestrebt wurde, es bloß als Funktion des Durchmesserverhältnisses  $m = \frac{d_n}{d_o}$  darzustellen, was auch in allen Fällen gelungen ist.

Der Rechnungsvorgang sei an der Formel von Smalian, verglichen mit dem Inhalt des astfreien Schaftteiles (nach Metzger), gezeigt:

$$v_o = \frac{3\pi}{20} l \left( \frac{d_o^5 - d_n^5}{d_o^3 - d_n^3} \right); \quad v_1 = \frac{\pi l}{4} \left( \frac{d_o^2 + d_n^2}{2} \right)$$

$$100 \frac{v_1 - v_o}{v_1} = \Delta \% = \frac{\left( \frac{d_o^2 + d_n^2}{2} \right) \frac{\pi l}{4} - \frac{3\pi}{20} l \left( \frac{d_o^5 - d_n^5}{d_o^3 - d_n^3} \right)}{\left( \frac{d_o^2 + d_n^2}{2} \right) \frac{\pi l}{4}} 100$$

$$\frac{d_n}{d_o} = m; \quad d_n = m d_o$$

Durch Einsetzen dieses Wertes und Kürzen erhält man

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{6}{5} \frac{(1-m^5)}{(1-m^3)(1+m^2)} \right]$$

In analoger Weise wurden auch die übrigen Formeln abgeleitet, wobei sich nachstehende Resultate ergaben:

1. Smalian:

a) Astfreier Schaft:  $\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{6}{5} \frac{(1-m^5)}{(1-m^3)(1+m^2)} \right]$

b) Kronenteil, Krone kegelförmig:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{(1-m^3)}{(1-m)(1+m^2)} \right]$$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 + \frac{6}{7} \frac{\left(1-m^{\frac{7}{2}}\right)}{\left(1-m^{\frac{3}{2}}\right)(1+m^2)} \right]$$

2. Hoßfeld:

a) Astfreier Schaft:  $\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{2,4 \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right)^{\frac{2}{3}}}{3 \left( \frac{m^2+2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} + m^2} \right]$

b) Kronenteil, Krone kegelförmig:  $\Delta \% = 0$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{12}{7} \left( \frac{1-m^{\frac{7}{2}}}{1-m^{\frac{3}{2}}} \right)}{3 \left( \frac{m^{\frac{3}{2}}+2}{3} \right)^{\frac{4}{3}} + m^2} \right]$$

3. Huber:

a) Astfreier Schafteil:  $\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right) \left( \frac{2}{1+m^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$

b) Kronenteil, Krone kegelförmig:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{(1-m^3)}{(1-m)(1+m^2)} \right]$$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{3}{7} \left( \frac{1-m^{\frac{7}{2}}}{1-m^{\frac{3}{2}}} \right)}{\left( \frac{1+m^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^{\frac{4}{3}}} \right]$$

4. Newton-Riecke:

a) Astfrtier Schafteil:  $\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{18}{5} \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right)^{\frac{2}{3}}}{1 + 4 \left( \frac{1+m^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} + m^2} \right]$

b) Kronenteil kegelförmig:  $\Delta \% = 0$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{18}{7} \left( \frac{1-m^{\frac{7}{2}}}{1-m^{\frac{3}{2}}} \right)}{1 + 4 \left( \frac{m^{\frac{3}{2}}+1}{2} \right)^{\frac{4}{3}} + m^2} \right]$$

5. Gauß-Simony:

a) Astfreier Schaftteil:  $\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{6}{5} \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left( \frac{m^3+4}{5} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{4m^3+1}{5} \right)^{\frac{2}{3}}} \right]$

b) Kronenteil, Krone kegelförmig:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{50}{3} \left( \frac{1-m^3}{1-m} \right)}{(4-m)^2 + (1+4m)^2} \right]$$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{\frac{6}{7} \left( \frac{1-m^{\frac{7}{2}}}{1-m^{\frac{3}{2}}} \right)}{\left( \frac{4+m^{\frac{3}{2}}}{5} \right)^{\frac{4}{3}} + \left( \frac{1+4m^{\frac{3}{2}}}{5} \right)^{\frac{4}{3}}} \right]$$

6. Schiffel:

a) Astfreier Schaftteil:  $\Delta \% =$

$$= 100 \left[ 1 - \frac{6,5734 \left( \frac{1-m^5}{1-m^3} \right)}{2,6522 (m^2+3)^{\frac{2}{3}} + 2,6956 (3m^3+1)^{\frac{2}{3}} - (m^3+3)^{\frac{1}{3}} (3m^3+1)^{\frac{1}{3}}} \right]$$

b) Kronenteil, Krone kegelförmig:

$$\Delta \% = 100 \left[ 1 - \frac{23,188 \left( \frac{1-m^3}{1-m} \right)}{2,6522 (m+3)^2 + 2,6956 (3m+1)^2 - (m+3)(3m+1)} \right]$$

c) Kronenteil, Krone zylindrisch:  $\Delta \% =$

$$= 100 \left[ 1 - \frac{11,832 \left( \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} \right)}{2,6522 \left( \frac{3}{2} + 3 \right)^{\frac{4}{3}} + 2,6956 \left( 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 \right)^{\frac{4}{3}} - \left( \frac{3}{2} + 3 \right)^{\frac{2}{3}} \left( 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 \right)^{\frac{2}{3}}} \right]$$

Da die Fehlerprozente durchwegs nur Funktionen des Durchmesserverhältnisses  $m = \frac{d_n}{d_o}$  sind, lassen sie sich für alle m (zwischen 1,0 und 0,0) ein für allemal ausrechnen und in einfacher Tabellenform zusammenstellen (Tabelle 32).

Schon bei Betrachtung dieser Tabelle zeigt sich, daß die Formel von Smalian ungenauere Ergebnisse liefert als die Mittenflächenformel, die übrigen Formeln jedoch genauere. Noch deutlicher wird das, wenn man das Fehlerprozent der Mittenflächenformel in jedem Falle gleich 100 annimmt und die Fehlerprozente der übrigen Formeln hiezu ins Verhältnis setzt.

Je nach der Größe des m, dem Schaftteil und der Kronenform erhielte man dann aber immer noch verschiedene Verhältniszahlen für dieselbe Formel. Um nun die praktisch verwertete Genauigkeit der Formel annähernd durch eine einzige Zahl ausdrücken zu können, sei folgende Überlegung angestellt: Die Hauptmasse des Schaftes etwa 85 v. H. — dem Wert nach noch viel mehr —, liegt im astfreien Teil, es soll also der Fehler des Kronenteiles vernachlässigt werden. Nun kann zwar die Länge des gemessenen Stammstückes ganz verschieden sein und demgemäß das Verhältnis des oberen Durchmessers  $d_n$  zum unteren  $d_o$  ganz verschiedene Werte m annehmen; da es sich aber hiebei immer um den astfreien Schaftteil handelt, kann  $d_o$  und damit auch  $m = \frac{d_n}{d_o}$  niemals Null werden. Der kleinste mögliche Durchmesser

liegt im Kronenansatz und der ist, wie Messungen lehren, fast niemals kleiner als der halbe Bodendurchmesser (ohne Wurzelanlauf). Es liegt somit m zwischen 1,0 und 0,5. Daher genügt es, die oben erwähnten Verhältniszahlen nur für den astfreien Schaftteil und nur für  $1,0 > m > 0,5$  zu berechnen. Nimmt man nun aus den Fehlerprozenten, die diesen m-Werten entsprechen, das Mittel ohne Berücksichtigung der Vorzeichen und setzt auch dieses ins Verhältnis zum Mittel der Huberschen Formel, dann kann das Resultat p als ein guter Ausdruck für die praktisch verwertete Genauigkeit der einzelnen

Tabelle 32.

m	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Smalian											
r = $\frac{2}{3}$	- 20,0	- 18,93	- 16,30	- 12,90	- 9,35	- 6,26	- 3,76	- 1,98	- 0,81	- 0,18	± 0
r = $\frac{4}{3}$	+ 14,29	+ 12,41	+ 9,81	+ 7,29	+ 5,09	+ 3,30	+ 1,95	+ 1,00	+ 0,40	+ 0,09	± 0
r = 2	+ 33,33	+ 26,73	+ 20,51	+ 14,99	+ 10,34	+ 6,67	+ 4,13	+ 2,01	+ 0,81	+ 0,18	± 0
Hoßfeld											
r = $\frac{2}{3}$	- 4,83	- 4,43	- 3,56	- 2,53	- 1,60	- 0,88	- 0,42	- 0,16	- 0,04	- 0,02	± 0
r = $\frac{4}{3}$	+ 1,88	+ 1,38	+ 0,86	+ 0,50	+ 0,27	+ 0,13	+ 0,05	+ 0,01	+ 0,00	+ 0,00	± 0
r = 2	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0
Huber											
r = $\frac{2}{3}$	+ 4,76	+ 4,72	+ 4,52	+ 4,06	+ 3,32	+ 2,51	+ 1,65	+ 0,84	+ 0,39	+ 0,09	± 0
r = $\frac{4}{3}$	- 8,00	- 7,85	- 5,42	- 3,90	- 2,57	- 1,71	- 1,00	- 0,54	- 0,21	- 0,05	± 0
r = 2	- 33,33	- 22,31	- 14,79	- 9,64	- 6,12	- 3,70	- 2,08	- 1,04	- 0,41	- 0,09	± 0
Newton-Riecke											
r = $\frac{2}{3}$	- 2,28	- 2,04	- 1,53	- 0,98	- 0,50	- 0,25	- 0,10	- 0,02	- 0,01	- 0,00	± 0
r = $\frac{4}{3}$	+ 0,62	+ 0,40	+ 0,20	+ 0,10	+ 0,04	+ 0,02	+ 0,01	+ 0,00	+ 0,00	+ 0,00	± 0
r = 2	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0	± 0
Gauß-Simony											
r = $\frac{2}{3}$	- 2,01	- 2,02	+ 0,24	+ 0,13	+ 0,05	- 0,06	- 0,07	- 0,06	- 0,03	- 0,01	± 0
r = $\frac{4}{3}$	+ 0,29	+ 0,33	+ 0,29	+ 0,26	+ 0,19	+ 0,13	+ 0,08	+ 0,04	+ 0,02	+ 0,00	± 0
r = 2	+ 1,96	+ 1,43	+ 1,02	+ 0,70	+ 0,46	+ 0,28	+ 0,16	+ 0,08	+ 0,03	+ 0,01	± 0
Schiffel											
r = $\frac{2}{3}$	+ 2,90	+ 2,85	+ 2,69	+ 2,39	+ 1,94	+ 1,34	+ 0,81	+ 0,40	+ 0,11	+ 0,08	± 0
r = $\frac{4}{3}$	+ 2,14	+ 1,94	+ 1,53	+ 1,11	+ 0,78	+ 0,40	+ 0,18	+ 0,04	+ 0,00	+ 0,00	± 0
r = 2	+ 1,60	+ 1,05	+ 0,74	+ 0,34	+ 0,13	+ 0,02	- 0,05	- 0,08	- 0,07	- 0,05	± 0
Hierbei entspricht $r = \frac{2}{3}$ dem astfreien Schafteil, $r = \frac{4}{3}$ dem Kronenteil bei kegelförmiger Krone, $r = 2$ dem Kronenteil bei zylindrischer Krone.											

Formeln gelten:  $p = \frac{100 \Delta \%}{\Delta \%_{om}}$ ;  $\Delta \% =$  Fehlerprozent der untersuchten Formel,  $\Delta \%_{om} =$  Fehlerprozent der Mittenflächenformel.

Tabelle 33.

m	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Mittel	
						%	Verh. z. Huber
Huber .	100	100	100	100	100	1,10	100
Smalian .	250	228	236	208	200	2,60	237
Hoßfeld .	35	25	21	10	22	0,30	28
Riecke .	10	6	3	3	0	0,08	7
Simony .	2	4	8	8	11	0,05	4
Schiffel..	53	49	54	28	89	0,56	51

Wie die vorstehende Tabelle 33 zeigt, ergibt die Formel von Gauß-Simony die besten Resultate, dann folgen: Newton-Riecke, Hoßfeld, Schiffel, Huber und schließlich Smalian.

Wie aber schon eingangs erwähnt wurde, ist hiebei der Tatsache nicht Rechnung getragen, daß die einzelnen Formeln eine verschiedene Anzahl von gemessenen Durchmessern verlangen: nämlich Huber eine, Newton-Riecke drei, die übrigen zwei.

Das kann dadurch geschehen, daß man eine Reduktion der Fehlerprozente bzw. ihres Verhältnisses p zu erreichen trachtet; etwa durch folgende Überlegung: Vergleicht man die Hubersche Formel mit einer, die zwei gemessene Durchmesser verlangt, dann muß das Schaftstück in zwei Sektionen nach Mittenstärke und Länge kubiert werden, wobei zur Vereinfachung nicht angenommen werden soll, daß die beiden Sektionen gleich lang seien. Da nun laut Ableitung der einzelnen Fehlerformeln das Fehlerprozent  $\Delta \%$  nur eine Funktion von m ist, so ist das Fehlerprozent der beiden Schaftstücke dann gleich groß, wenn die Durchmesserverhältnisse  $m_1$  und  $m_2$  gleich groß sind. Wird der untere Durchmesser mit  $d_o$ , der mittlere mit  $d_m$  und der obere mit  $d_n$  bezeichnet, dann ist  $\frac{d_n}{d_m} = m_1$ ,  $\frac{d_m}{d_o} = m_2$ . Bezeichnet man mit  $d_n = m$  wie bisher, dann ist  $m = m_1 m_2$  oder wenn  $m_2 = m_1 \dots m = m_1^2$ ;  $m_1 = m_2 = \sqrt{m}$  (bei 3 Durchmessern  $m_1 = m_2 = m_3 = \sqrt[3]{m}$ ).

Das heißt: Das Fehlerprozent der beiden Schaftstücke  $\Delta \% \sqrt[m]{m}$  entspricht  $\sqrt[m]{m}$ . Da sie beide gleich groß sind, ist dieses Fehlerprozent gleich dem des ganzen Schaftstückes.

Das Fehlerprozent  $\frac{\Delta\%}{\sqrt{m}}$  der Mittenflächenformel ist somit im einzelnen Falle das  $\sqrt[3]{m}$  oder  $\sqrt[m]{m}$  entsprechende, je nachdem es mit einer Formel verglichen wird, die 2 oder 3 gemessene Durchmesser erfordert.

Will man nun das Verhältnis  $p_1$  ermitteln, das sich ergibt, wenn das Fehlerprozent  $\Delta\%$  der Mittenflächenformel gleich 100 gesetzt wird, dann ist das Fehlerverhältnis  $p$  der jeweils untersuchten Formel mit  $\frac{\Delta\% m}{\Delta\% \sqrt{m}}$  oder  $\frac{\Delta\% m}{\Delta\% \sqrt[m]{m}}$  zu multiplizieren:  $p_1 = p \frac{\Delta\% m}{\Delta\% \sqrt{m}}$ . Da ohne Berücksichtigung der Anzahl der gemessenen Durchmesser dieses Verhältnis  $p = 100 \frac{\Delta\%}{\Delta\% m}$  war, wobei  $\Delta\%$  das Fehlerprozent der mit der Mittenflächenformel verglichenen Formel war, so ist nunmehr  $p_1 = 100 \frac{\Delta\% \Delta_m \%}{\Delta_m \% \Delta\% \sqrt{m}} = 100 \frac{\Delta\%}{\Delta\% \sqrt{m}}$ ; oder für 3 Durchmesser  $p_1 = 100 \frac{\Delta\%}{\Delta\% \sqrt[3]{m}}$ . Mit Hilfe dieser Formel wurde die Tabelle 34 errechnet.

Aus ihr ergibt sich, daß bei Messung von gleich vielen Durchmessern lediglich die Formeln von Gauß-Simony und Newton-Riecke merklich genauere Resultate ergeben als die Hubersche.

Praktisch verwertbar ist diese größere Genauigkeit allerdings nicht, denn selbst bei Sektionslängen bis 10 m beträgt der Fehler der Mittenflächenformel gegenüber der theoretischen Schaftform, theoretischer Fehler, nur einige Prozente desjenigen, der sich infolge Abweichungen der tatsächlichen Form und von Messungsgenauigkeiten, „Meßfehler“ ergibt. Eine weitere Herabsetzung dieses ohnedies schon kleinen Fehleranteiles würde keine nennenswerte Verringerung des Gesamtfehlers ergeben.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn es sich um die Kubierung ganzer Stämme mit 1—2 Sektionen handelt. Hier sind bei der Mittenflächenformel beide Fehleranteile von gleicher Größenordnung. Eine Herabsetzung des theoretischen Fehlers würde sich somit auch praktisch auswirken.

Ohne nun auf naheliegende Einwände gegen die zu erwartende Genauigkeit einzugehen, sollen diese Formeln an Hand der gleichen Konstruktionsstämme und einiger Normalstämme von Guttenbergs Fichte erprobt werden, wie seinerzeit die Hubersche Formel.

**Tabelle 34.**

m	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4% Mittel	4% Verhältnis
4% .	2,51	1,65	0,84	0,39	0,09	1,096	
$\sqrt{m} \dots$	0,707	0,775	0,837	0,894	0,948		
$4\% \sqrt{m}$	0,82	0,48	0,26	0,10	0,02	0,336	
$\sqrt[3]{m} \dots$	0,793	0,843	0,886	0,927	0,965		
$4\% \sqrt[3]{m}$	0,40	0,23	0,12	0,05	0,01	0,162	
Huber .	100	100	100	100	100	1,096	100
Smalian .	764	783	761	810	900	2,598	772
Hoßfeld .	107	87	61	40	100	0,304	90
Riecke .	62	43	17	20	0	0,076	47
Simony .	7	15	23	30	50	0,046	14
Schiffel..	164	169	154	110	400	0,558	166

Da die obere Endfläche bei der Messung des ganzen Stammes gleich Null wird, nehmen jene Formeln, die sie verwenden, eine andere Form an.

1. Smalian:  $v_1 = 0,5 l g_o$ .
2. Hoßfeld:  $v_1 = 0,75 l g_{1/8}$ .
3. Huber:  $v_1 = \gamma l$ .

4. Newton-Riecke:  $v_1 = \frac{1}{6} (g_o + 4\gamma)$ .

5. Gauß-Simony:  $v_1 = \frac{1}{2} (g_{1/8} + g_{1/4})$ .

6. Schiffel:  $v_1 = l (0,61 g_{1/4} + 0,62 g_{1/8} - 0,25 g_{1/16} q_{1/16})$ .

Die Durchmesser und Längen sind aus der Tabelle 35 zu entnehmen.

Die Fehlerprozente sind nach der Formel  $4\% = 100 \frac{v_1 - v_o}{v_1}$

errechnet und in der Tabelle 36 zusammengestellt worden.

Vergleicht man nun die Fehlerdifferenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Fehler der nur einen Durchmesser erfordernenden Formeln von Smalian — 10 v. H. —, Huber — 12 v. H. — und Hoßfeld — 7 v. H. — miteinander, dann findet man — höchstens mit Ausnahme Hoßfeld — keine allzugroßen Unterschiede, besonders dann nicht, wenn man bedenkt, daß in den Vergleichsstämmen nicht die größtmöglichen Unterschiede enthalten sein müssen.

Tabelle 35.

Berechnungsdaten: n = a =	Konstruktions- stamm			Stärkeklasse				
	I	II	III	I stark	I schw.	II mittel	IV stark	IV schw.
	1,0	0,8	0,67	0,78	0,75	0,67	0,80	1,00
h	d	d	d	d	d	d	d	d
0	57,4	53,9	51,3	45,1	28,4	32,4	30,5	18,9
1	56,8	53,4	50,8	44,6	28,0	32,0	29,8	18,4
2	56,3	52,9	50,4	44,1	27,6	31,5	29,1	17,9
3	55,7	52,4	49,9	43,6	27,2	31,0	28,3	17,4
4	55,1	51,8	49,4	43,1	26,8	30,5	27,5	16,9
5	54,5	51,3	48,9	42,5	26,4	29,9	26,6	16,3
6	53,9	50,7	48,4	41,9	25,9	29,4	25,7	15,7
7	53,3	50,2	47,9	41,3	25,4	28,9	24,7	15,0
8	52,6	49,6	47,4	40,7	25,0	28,3	23,6	14,3
9	52,0	49,0	46,8	40,1	24,5	27,7	22,4	13,5
10	51,3	48,4	46,3	39,4	24,0	27,1	21,1	12,5
11	50,6	47,8	45,7	38,7	23,4	26,4	19,7	11,3
12	49,9	47,1	45,1	38,0	22,8	25,7	18,2	9,9
13	49,2	46,5	44,5	37,3	22,2	25,0	16,7	8,2
14	48,4	45,8	43,9	36,6	21,6	24,2	15,2	6,6
15	47,6	45,1	43,3	35,8	20,9	23,4	13,7	5,0
16	46,8	44,4	42,6	35,0	20,2	22,5	12,1	3,3
17	46,0	43,7	42,0	34,1	19,4	21,5	10,5	1,6
18	45,1	42,9	41,3	33,2	18,5	20,4	8,8	0,0
19	44,2	42,1	40,6	32,3	17,6	19,2	7,0	
20	43,3	41,3	39,8	31,3	16,6	18,0	5,0	
21	42,3	40,4	39,0	30,2	15,4	16,7	2,9	
22	41,3	39,5	38,2	29,1	14,1	15,5		
23	40,2	38,5	37,4	27,8	12,7	14,2		
24	39,0	37,5	36,5	26,4	11,3	12,8		
25	37,8	36,5	35,6	24,9	9,9	11,3		
26	36,5	35,4	34,6	23,4	8,4	9,7		
27	35,1	34,2	33,6	21,8	6,8	8,0		
28	33,6	32,9	32,5	20,2	5,0	6,1		
29	31,9	31,5	31,3	18,6	2,9	3,8		
30	30,0	30,0	30,0	16,9	0,0	0,0		
31	28,0	28,4	28,6	15,3				
32	26,0	26,8	27,2	13,6				
33	24,0	25,1	25,8	11,8				
34	22,0	23,4	24,3	9,9				
35	20,0	21,7	22,8	7,9				
36	18,0	19,9	21,3	5,8				
37	16,0	18,1	19,7	3,4				
38	14,0	16,3	18,0	0,0				
39	12,0	14,4	16,2					
40	10,0	12,5	14,3					
41	8,0	10,5	12,3					
42	6,0	8,3	10,2					
43	4,0	6,0	7,8					
44	2,0	3,5	4,9					
45	0,0	0,0	0,0					

**Tabelle 36.**

	Konstruktionsstamm			Guttenbergs Normalstamm				
	I	II	III	I stark	I schw.	II mittel	IV stark	IV schw.
Huber .	+ 5,12	+ 5,30	+ 5,44	+ 4,57	+ 5,85	+ 4,33	— 5,32	+ 6,73
Smalian .	+ 6,47	+ 2,83	- 0,71	+ 4,68	+ 1,09	+ 3,35	+ 3,44	+ 9,70
Hoßfeld .	+ 9,33	+ 7,40	+ 5,77	+ 8,83	+ 7,67	+ 7,90	+ 11,62	+ 12,75
Riecke .	+ 6,69	+ 5,60	+ 4,84	+ 5,95	+ 6,15	+ 5,93	+ 5,29	+ 10,79
Simony .	- 1,77	- 1,01	- 0,24	- 0,24	+ 0,85	+ 1,32	+ 5,10	+ 1,79
Schiffel .	+ 3,87	+ 3,86	+ 3,98	+ 4,93	+ 5,25	+ 4,04	+ 8,46	+ 7,22

Nun stellen aber diese drei Formeln nichts anderes dar, als Formzahlformeln mit den konstanten Formzahlen 0,5, 0,75 und 1,0. Es ist klar, daß sie gegenüber Formzahlformeln mit variablen Formzahlen, wie es die üblichen Formzahlentafeln sind, auch dann eine geringere Genauigkeit aufweisen, wenn durch Herabsetzung der konstanten Formzahl oder Höherlegung des Durchmessers — Kunze, Glaser, Petrini — erreicht wird, daß die theoretischen Fehler sowohl positiv als auch negativ werden und dann für die untersuchten Stämme im Mittel bei Huber  $\pm 6$  v. H., bei Smalian  $\pm 5$  v. H., bei Hoßfeld  $\pm 3,5$  v. H. betragen. Würde man zur genaueren Ermittlung der Formzahlen das Kronenprozent heranziehen, dann könnte der Fehler auf fast die Hälfte herabgedrückt werden.

Die Formeln von Riecke, Simony und Schiffel weisen trotz zweier gemessener Durchmesser mit Fehlerspannungen von 6 v. H., 7 v. H. und 5 v. H. keine besondere Genauigkeitssteigerung gegenüber den Formeln von Huber, Smalian und Hoßfeld auf. Die sektionsweise Kubierung mit der Huberschen Formel in zwei Sektionen (astfreier Schaft und Kronenteil) würde beispielsweise nur eine Fehlerspannung von rund 3 v. H. ergeben, die Anwendung des Durchmesserquotienten  $\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}}$  nur 2,5 v. H.

Zusammenfassend kann somit gesagt werden, daß die Verwendung der untersuchten Formeln gegenüber der Huberschen Formel keine nennenswerte Genauigkeitssteigerung ergibt: bei kurzen Stammstückchen deshalb nicht, weil der Einfluß der Meßfehler überwiegt, bei ganzen Stämmen deshalb nicht, weil keine starke Herabsetzung des Fehlers stattfindet. Insbesondere ist den Zweiflächenformeln die sektionsweise Kubierung mit zwei Sektionen und die Verwendung des Durchmesserquotienten überlegen.

Am ehesten bringt noch die Verwendung der Hoßfeldschen Formel zur Kubierung ganzer Stämme Vorteile, doch wäre auch hier die Verwendung des Kronenprozentes an Stelle der konstanten Formzahl zu empfehlen.

## 2. Massenermittlung von Stämmen.

Wenngleich mitunter die Masse stehender Bäume nach den für liegendes Holz geltenden Formeln ermittelt wird, so werden doch in der Regel hiefür Formzahlen verwendet. Leider war bisher die Beschäftigung mit Formzahlen ein schmerzliches Vergnügen, weil sie durch die Art der Betrachtung von so vielen äußeren Umständen abhängig schienen, daß ihre Erhebung an stehenden Stämmen auch für Bestandsmittelstämme in der Praxis undurchführbar erschien.

Die Metzgersche Schaftformhypothese bietet auch hier eine Basis, von der aus es möglich ist, in das Gewirr von Messungsergebnissen und hieraus gezogenen Schlüssen Ordnung und Klarheit zu bringen.

Der Untersuchungsgang soll folgender sein:

- a) Ableitung der Formzahlformeln.
- b) Ermittlung ihrer Genauigkeit.
- c) Vergleich mit Messungen.

### a) Ableitung der Formzahlformeln.

#### a) Die absolute Formzahl.

Die bisher in der Holzmeßkunde übliche Annahme, daß die Erzeugende des Schaftes durch ein einziges mathematisches Gesetz ausgedrückt werde, steht in schroffem Widerspruch zur Metzgerschen Schaftformhypothese. Mit ihrer Anerkennung muß auch der besondere theoretische Vorzug fallen gelassen werden, der bisher der absoluten Formzahl eingeräumt wurde.

Die Ableitung dieser Formzahlformel kann etwa auf Grund folgender Überlegung erfolgen:

Die Masse  $m$  des Schaftes setzt sich aus der Masse  $m_2$  des astfreien und  $m_1$  des beasteten Schaftteiles zusammen.  $m = m_1 + m_2$ .  $m_1$  entspricht dem Volumen eines Paraboloides von der Gleichung  $d_k = 2a_k k^{\frac{r+2}{3}}$  dann ist  $V_k = m_1 = \frac{3gk}{2r+7}$  oder, wenn für  $\frac{r+2}{3} = n$  gesetzt wird:  $m_1 = \frac{gk}{2n+1}$ .

Das Volumen  $m_2$  errechnet sich aus dem dem astfreien Schaftteil entsprechenden Paraboloid abzüglich des über dem Kronenansatz liegenden Teiles (Fig. 8). Dem unbeasteten Schaftteile entspricht eine Parabel der Gleichung  $d_s = 2a_s \sqrt[3]{S}$  und daher ein Volumen  $V_s = \frac{g_s S}{\frac{5}{3}} = 0,6 g_s S$ . Für  $S = S_o$  und  $g_s = g_o$  erhält man das Volumen des ganzen über dem Boden liegenden Paraboloides des astfreien Schaftteiles.  $V_{so} = 0,6 G_o \left( s + \frac{k}{r+2} \right)$ . Hier von ist der über dem Kronenansatz liegende Paraboloidteil von der Länge  $\frac{k}{r+2}$  in Abzug zu bringen.

Sein Volumen ist  $V_D = 0,6 g \frac{k}{r+2}$

$$m_2 = V_{so} - V_D = 0,6 g_o \left( s + \frac{k}{r+2} \right) - 0,6 g \frac{k}{r+2}$$

$$m = m_1 + m_2 = \frac{3 g k}{2 r + 7} + 0,6 g_o \left( s + \frac{k}{r+2} \right) - 0,6 g \frac{k}{r+s}$$

$$m = g k \left( \frac{3}{2 r + 7} - \frac{0,6}{r+2} \right) + 0,6 g_o \left( s + \frac{k}{r+2} \right)$$

$$m = g k \left[ \frac{3(r+2) - 0,6(2r+7)}{(2r+7)(r+2)} \right] + 0,6 g_o \left( s + \frac{k}{r+2} \right),$$

$$\frac{m}{g_o h} = F_o = \frac{g}{g_o} \cdot \frac{k}{h} \left[ \frac{1,8(r+1)}{(2r+7)(r+2)} \right] + 0,6 \left( \frac{s}{h} + \frac{k}{h} \cdot \frac{1}{r+2} \right)$$

$$100 \frac{k}{h} = k \% \quad (\text{Kronenprozent})$$

$$100 \frac{s}{h} = s \% \quad (\text{Schaftprozent})$$

$$\frac{k}{h} + \frac{s}{h} = 1, \text{ daher } \frac{s}{h} = 1 - \frac{k}{h}$$

$$1000 F_o = \frac{g}{g_o} k \% \left[ \frac{g(r+1)}{(r+3,5)(r+2)} \right] + 6 \left( 100 - k \% + \frac{k \%}{r+2} \right)$$

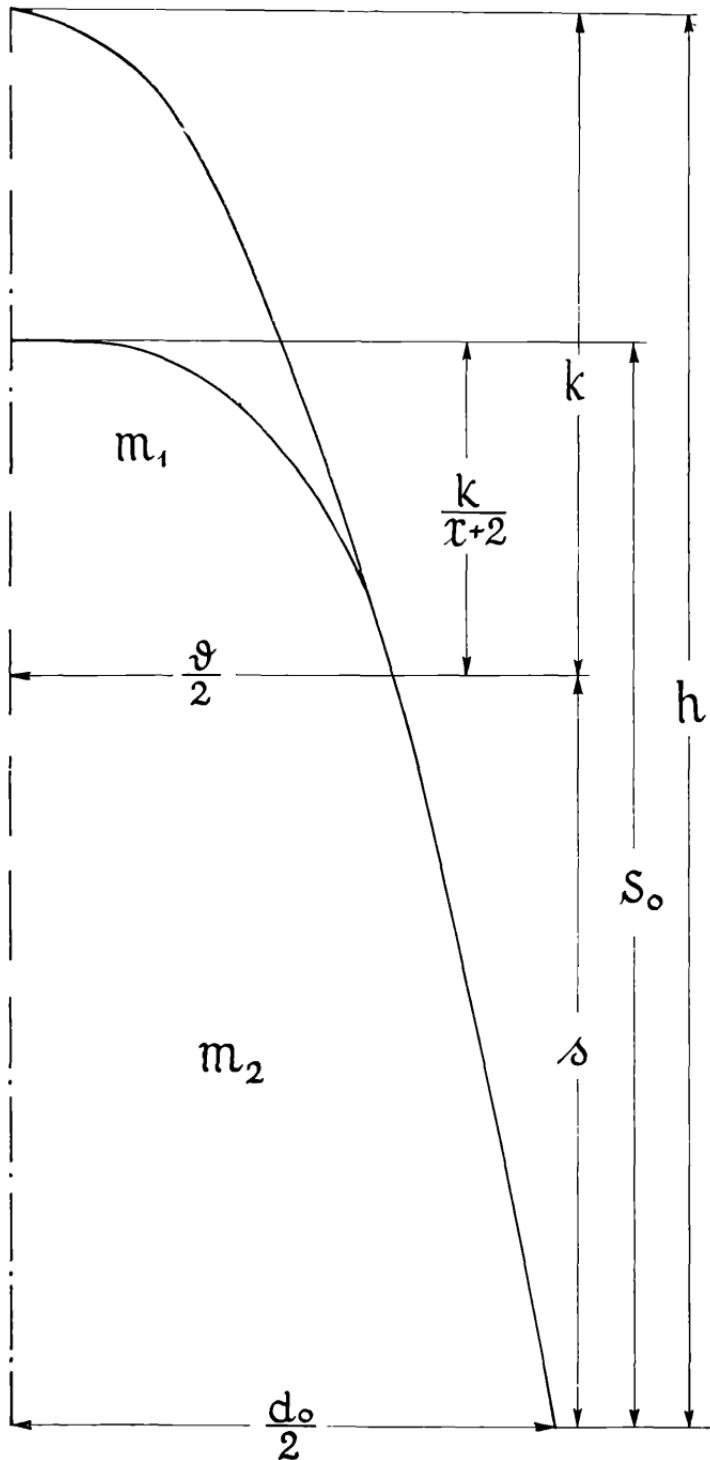


Fig. 8.

$$1000 F_o = \frac{g}{g_o} k \% \underbrace{\left[ \frac{g(r+1)}{(r+3,5)(r+2)} \right]}_B + 600 - k \% \underbrace{6 \left( \frac{r+1}{r+2} \right)}_A$$

$$1000 F_o = 600 - A k \% + \frac{g}{g_o} k \% B = 600 - k \% \left( A - \frac{g}{g_o} B \right)$$

Hiebei ist  $A = 6 \left( \frac{r+1}{r+2} \right)$  und  $B = \frac{g(r+1)}{(r+3,5)(r+2)} = \frac{1,5A}{r+3,5}$ . Der Potenzexponent des Kronenparaboloides kommt nur in den Konstanten A und B vor. Wenn es gelingt, den Quotienten  $\frac{g}{g_o}$  als Funktion von  $k\%$  und  $r$  darzustellen, dann ist die absolute Formzahl  $F_o$  nur eine Funktion dieser beiden. Zur Ermittlung der Masse wäre neben der Messung von  $d_o$  und  $h$  nur die Bestimmung von  $k\%$  und  $r$  nötig.

$$d_o = 2 a_s S_o^{\frac{1}{3}} = 2 a_s \left( s + \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad a_s = \frac{d_o}{2 \left( s + \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\vartheta = 2 a_s \left( \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{d_o \left( \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left( s + \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}}}; \quad \vartheta^3 = d_o^3 \frac{k}{\left( s + \frac{k}{r+2} \right) (r+2)}$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit 100 multipliziert und durch  $h$  dividiert werden,

$$\vartheta^3 = d_o^3 \frac{k \%}{\left[ 100 - k \% \left( 1 - \frac{1}{r+2} \right) \right] (r+2)}; \quad \vartheta^3 = d_o^3 \frac{k \%}{100(r+2) - k \% (r+1)}$$

$$\frac{\vartheta}{d_o} = \left[ \frac{k \%}{100(r+2) - k \% (r+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \text{ und somit}$$

$$\frac{g}{g_o} = \left[ \frac{k \%}{100(r+2) - k \% (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{und daher } 1000 F_o = 600 - k \% \left\{ A - B \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k \%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Setzen wir in diese Formel für  $A = 6 \left( \frac{r+1}{r+2} \right)$  und  $B = \frac{1,5 A}{r+3,5} = \frac{9(r+1)}{(r+3,5)(r+2)}$  dann erhalten wir:

$$1000 F_o = 600 - 6k\% \left( \frac{r+1}{r+2} \right) \left\{ 1 - \frac{1,5}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}$$

Setzen wir für den Exponenten r des reduzierten Kronenparaboloides den Exponenten n des Paraboloides des besteten Schafteiles  $r = 3n - 2$ , dann erhalten wir:

$$1000 F_o = 600 - 6k\% \left( 1 - \frac{1}{3n} \right) \left\{ 1 - \frac{1,5}{3n + 1,5} \left[ \frac{1}{\frac{300n}{k\%} - (3n - 1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}$$

Die nachstehende Tabelle 37 enthält die nach obiger Formel berechneten absoluten Formzahlen für alle Kronenprozente in Abstufungen von 10 zu 10% und für  $r = 0, + \frac{1}{2}, + 1,0$ , entsprechend  $n = \frac{2}{3}, + \frac{5}{6}, + 1,0$ .

**Tabelle 37.**

k%	r = +1	r = +1/2	r = ± 0	k%	r = +1	r = +1/2	r = ± 0
0	600	600	600	60	398,4	426,2	463,9
10	561,4	565,6	571,8	70	373,5	406,4	449,6
20	524,9	533,4	545,9	80	353,5	390,3	438,6
30	490,0	503,3	522,1	90	339,1	378,9	431,4
40	457,1	475,1	500,4	100	333,3	375,0	428,6
50	426,6	449,4	480,9				

### β) Die echte Formzahl.

Die echte Formzahl kann auf Grund der Massengleichheit von Bodengrundfläche mal absoluter Formzahl mal Höhe und von Grundfläche in 1/n der Höhe mal echter Formzahl in 1/n mal Höhe berechnet werden.

$$m = F_o g_o h = F_{1/n} g_{1/n} h; \quad F_o g_o = F_{1/n} g_{1/n}; \quad F_{1/n} = F_o \frac{g_o}{g_{1/n}}$$

Da  $F_o$  als eine Funktion von  $k\%$  und  $r$  bekannt ist, handelt es sich lediglich darum, den Quotienten  $\frac{g_o}{g_{1/n}}$  ebenfalls als Funktion dieser Größen darzustellen.

Die Ableitung der Formel soll in der Weise geschehen, daß  $g_o$  als Funktion von  $g_{1/n}$  dargestellt und hierauf die Bildung des Quotienten

$\frac{g_o}{g_{1/n}}$  versucht wird. Nach Fig. 6 ist  $d_{1/n} = 2a_s \left( s + \frac{k}{r+2} - \frac{h}{n} \right)^{\frac{1}{3}}$  und

$$d_o = 2a_s \left( s + \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Somit ist } \left( \frac{d_{1/n}}{2a_s} \right)^3 = s + \frac{k}{r+2} - \frac{h}{n} \quad .(1) \text{ und}$$

$$\left( \frac{d_o}{2a_s} \right)^3 = s + \frac{k}{r+2} \quad .(2). \quad (2) \text{ in } (1) \text{ eingesetzt, ergibt } \left( \frac{d_{1/n}}{2a_s} \right)^3 =$$

$$= \left( \frac{d_o}{2a_s} \right)^3 - \frac{h}{n}; \quad d_o = d_{1/n}^3 + \frac{8a_s^3 h}{n} \quad .(3). \quad \text{Aus } (2) \text{ errechnet sich}$$

$$8a_s^3 = \frac{d_o^3}{s + \frac{k}{r+2}}; \quad (2) \text{ in } (3) \text{ eingesetzt, gibt: } d_o^3 = d_{1/n}^3 + \frac{d_o^3 h}{n \left( s + \frac{k}{r+2} \right)}$$

$$\text{und durch Umformung } d_{1/n}^3 - d_o^3 \left[ 1 - \frac{h}{n \left( s + \frac{k}{r+2} \right)} \right]$$

$$\frac{d_o^3}{d_{1/n}^3} = \frac{1}{1 - \frac{h}{n \left( s + \frac{k}{r+2} \right)}} \quad \frac{d_o^3}{d_{1/n}^3} = \frac{1}{1 - \frac{h}{\frac{ns(r+2) + nk}{r+2}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{h(r+2)}{ns(r+2) + nk}} \quad \text{Zähler und Nenner des Teilbruches mit 100}$$

multipliziert und durch  $h$  dividiert, gibt  $\left( \frac{d_o}{d_{1/n}} \right)^3 =$

$$= \frac{1}{1 - \frac{100(r+2)}{n \frac{100}{h} s(r+2) + n \frac{100k}{h}}}. \text{ Beachtet man, daß } \frac{100k}{h} = k\% \text{ und}$$

$$\frac{100s}{h} = s\% \text{ und daß } k\% + s\% = 100, \text{ so erhält man}$$

$$\left( \frac{d_o}{d_{1/n}} \right)^3 = \frac{1}{1 - \frac{100(r+2)}{(100 - k\%)n(r+2) + k\%n}}; \quad \left( \frac{d_o}{d_{1/n}} \right)^3 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{100(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]n}}$$

$$\frac{g_o}{g_{1/n}} = \left( \frac{d_o}{d_{1/n}} \right)^2 = \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{100(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]n} \right\}^{\frac{2}{3}}}$$

Da  $F_{1/n} = F_o \frac{g_o}{g_{1/n}}$ , so erhält man durch Einsetzen der Werte für  $F_o$

$$\text{und } \frac{g_o}{g_{1/n}}$$

$$1000F_{1/n} = \frac{600 - 6k\% \left( \frac{r+1}{r+2} \right) \left\{ 1 - \frac{1,5}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^3 \right\}^{\frac{2}{3}}}{\left\{ 1 - \frac{100(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]n} \right\}^{\frac{2}{3}}}$$

Die Ableitung gilt nur bis zu einem Kronenansatz  $1/n$  über den Boden. Für einen noch tieferen Kronenansatz lässt sich folgende Formel ableiten:

$$d_{1/n} = 2a_k \left( h - \frac{h}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}} \quad (\text{Fig. 9}) \quad d_{1/n} = 2a_k h^{\frac{r+2}{3}} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}}$$

$$\frac{d_{1/n}}{2a_k} = h^{\frac{r+2}{3}} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}} \quad .(1) \quad \vartheta = 2a_k k^{\frac{r+2}{3}} \quad 2a_k = \frac{\vartheta}{k^{\frac{r+2}{3}}} \quad (2)$$

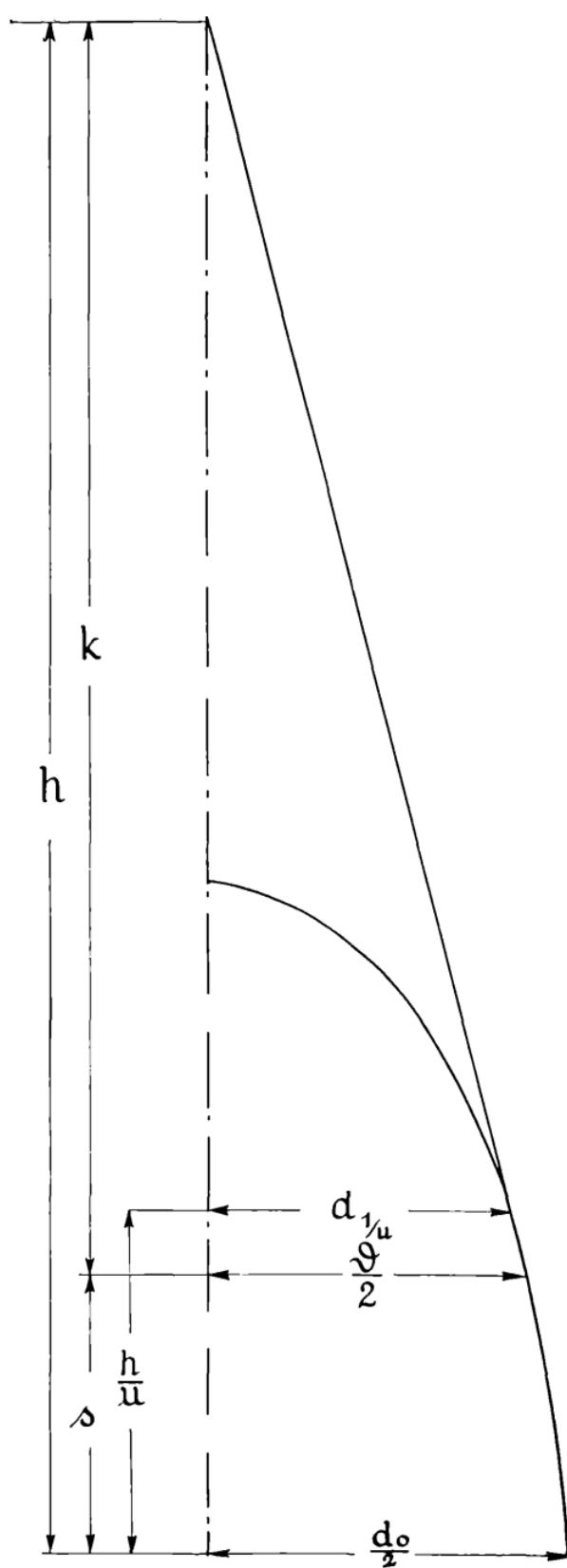


Fig. 9.

$$(2) \text{ in (1) eingesetzt, gibt } \frac{d_{1/n}}{\vartheta} k^{\frac{r+2}{3}} = h^{\frac{r+2}{3}} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}}$$

$$\frac{d_{1/n}}{\vartheta} = \left( \frac{h}{k} \right)^{\frac{r+2}{3}} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}}$$

$$\text{Da } 100 \frac{h}{k} = \frac{1}{k\%} \text{ erhält man: } \frac{d_{1/n}}{\vartheta} = \left( \frac{100}{k\%} \right)^{\frac{r+2}{3}} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{r+2}{3}}$$

$$\frac{d_{1/n}}{\vartheta} = \left[ \frac{100(n-1)}{nk\%} \right]^{\frac{r+2}{3}} \quad .(3)$$

Nun ist (S. 84)  $\frac{\vartheta}{d_o} = \left[ \frac{k\%}{100(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{1}{3}}$  und unter Berücksichtigung dieser Formel

$$\frac{d_{1/n}}{d_o} = \left[ \frac{100(r-1)}{nk\%} \right]^{\frac{r+2}{3}} \left[ \frac{k\%}{100(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{g_{1/n}}{g_o} = \left[ \frac{100(n-1)}{nk\%} \right]^{\frac{2(r+2)}{3}} \left[ \frac{k\%}{100(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Da nun  $F_{1/n} = F_o \frac{g_o}{g_{1/n}}$  ist, erhält man

$$F_{1/n} = \frac{F_o}{\left[ \frac{100(n-1)}{nk\%} \right]^{\frac{2(r+2)}{3}} \left[ \frac{k\%}{100(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}}$$

Gültig für  $100 \frac{n-1}{n} < k\% < 100$ .

Setzen wir in diesen Formeln  $n = 20, 10, 4$  und  $2$ , dann erhalten wir die echten Formzahlen, bezogen auf die Durchmesser in  $^{1/20}, ^{1/10}, ^{1/4}$  und  $^{1/2}$  der Höhe (Tabelle 38).

Tabelle 38.

k%	1000 $f_{1/20}$			1000 $f_{1/10}$			1000 $f_{1/4}$			1000 $f_{1/2}$		
	r = 1	r = 0,5	r = 0	r = 1	r = 0,5	r = 0	r = 1	r = 0,5	r = 0	r = 1	r = 0,5	r = 0
0	622	622	622	645	645	645	729	729	729	952	952	952
5	602	605	607	625	629	631	710	713	715	944	945	946
10	583	588	593	606	612	618	692	697	702	936	939	941
15	565	571	580	588	595	605	675	681	690	933	934	939
20	547	555	568	570	579	593	657	666	679	932	933	938
25	529	540	556	553	565	581	642	654	669	934	936	939
30	512	525	545	537	551	570	629	642	659	942	942	943
35	495	511	534	521	538	560	615	630	650	956	954	951
40	479	498	524	505	525	550	603	620	642	981	971	961
45	464	485	514	490	512	540	592	611	635	1017	1000	978
50	449	472	505	475	500	531	582	602	629	1073	1035	1001
55	436	460	497	463	488	523	575	596	625	1139	1076	1020
60	423	449	489	451	477	516	570	593	623	1192	1110	1041
65	410	439	482	440	468	509	568	592	622	1235	1137	1055
70	398	431	475	430	461	503	567	592	624	1269	1156	1065
75	389	424	470	422	456	499	576	594	625	1297	1169	1073
80	382	418	465	416	452	496	584	601	629	1312	1180	1076
85	376	413	462	413	450	494	588	604	631	1323	1186	1077
90	372	410	459	410	448	493	593	606	632	1330	1189	1078
95	371	410	459	415	450	495	593	606	632	1333	1190	1079
100	371	410	459	423	454	498	593	606	632	1333	1191	1081

γ) Die echte Formzahl als Funktion des Durchmesserquotienten

$$\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}}.$$

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, ist die echte Formzahl vom Kronenprozent k% und dem Kronenexponenten r abhängig. Durch Messung von einem oder zwei weiteren Durchmessern ließe sich eine oder beide Veränderliche ausschalten.

Vom Ersatz des Kronenexponenten durch einen Durchmesser lässt sich jedoch kaum eine Steigerung der Genauigkeit erwarten, einerseits weil der Einfluß des Exponenten auf die Formzahl für die praktisch in Frage kommenden Kronenprozente kaum  $\pm 5\%$  übersteigt, anderseits weil sich bei dem als Ersatz heranzuziehenden oberen Durchmesser die Meß- und sonstigen Fehler schon stark bemerkbar machen. Demnach hätte nur der Ersatz des Kronenprozentes durch einen Durchmesser Aussicht auf Steigerung der Genauigkeit der Formzahl.

In Anlehnung an Schiffel soll der in halber Höhe gemessene Durchmesser als Ersatz für das Kronenprozent herangezogen und die Form-

zahl  $f_{\gamma_4}$  als Funktion des Durchmesserquotienten  $\frac{d_{\gamma_2}}{d_{\gamma_4}}$  berechnet werden.

Der Vorgang bei der Aufstellung der Formel ist der, daß zunächst die absolute Formzahl  $F_o$  als Funktion des Durchmesserquotienten  $\frac{d_{\gamma_2}}{d_{\gamma_4}}$ , hierauf die echte Formzahl  $F_{\gamma_4}$ , ebenfalls als Funktion des Durchmesserquotienten dargestellt wird.

Den Ausgangspunkt der Ableitung bildet die S. 85 abgeleitete Formel für die absolute Formzahl:

$$1000 F_o = 600 - 6k\% \left( \frac{r+1}{r+2} \right) \left\{ 1 - \frac{1,5}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\} \quad (1)$$

$$\text{und die Formel } \frac{g}{g_o} = \left[ \frac{k\%}{100(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

Diese Formel wird benutzt, um  $\frac{g_{\gamma_2}}{g_{\gamma_4}}$  als Funktion von  $k\%$  und  $r$  darzustellen. Hieraus wird  $k\%$  gerechnet und in die Gleichung (1) eingesetzt, so daß  $1000 F_o$  nur eine Funktion von  $\frac{d_{\gamma_2}}{d_{\gamma_4}}$  und  $r$  ist.

Um  $\frac{g}{g_o}$  als Funktion von  $\frac{g_{\gamma_2}}{g_{\gamma_4}}$  darzustellen, soll  $g$  als Funktion von  $g_{\gamma_2}$  und  $g_o$  als solche von  $g_{\gamma_4}$  berechnet werden.

Da letzteres schon durch die S. 87 abgeleitete Formel  $\frac{g_o}{g_{\gamma_4}} = \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{100(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]n} \right\}^{\frac{2}{3}}}$  geschehen ist, wenn für  $n = 4$

gesetzt wird, braucht nur mehr eine analoge Formel für  $g_{\gamma_2}$  als Funktion von  $g$  abgeleitet zu werden.

Aus der schon mehrfach besprochenen Parabelgleichung für den astfreien Schaftteil ergibt sich unter Berücksichtigung der Fig. 6, wenn vorerst der Durchmesser allgemein in  $\frac{1}{v}$  der Höhe gemessen wurde,

$$s + \frac{k}{r+2} - \frac{h}{v} = d_{1/v}^3 \frac{1}{8a_s^3} \text{ und } \frac{k}{r+2} = \vartheta^3 \frac{1}{8a_s^3} \text{ und durch Einsetzen}$$

$$s + \vartheta^3 \frac{1}{8a_s^3} - \frac{h}{v} = d_{1/v}^3 \frac{1}{8a_s^3}; \quad \frac{1}{8a_s^3} \vartheta^3 = \frac{1}{8a_s^3} d_{1/v}^3 + \frac{h}{v} - s; \quad \vartheta^3 = d_{1/v}^3 +$$

$$+ \left( \frac{h}{v} - s \right) 8a_s^3. \quad .(1). \text{ Nun ist } s + \frac{k}{r+2} = \frac{d_o^3}{8a_s^3} =$$

$$= \frac{\vartheta^3}{8a_s^3 k \%} [100(r+2) - k \% (r+1)] \quad (2) \text{ und}$$

$$\frac{\vartheta}{d_o} = \sqrt[3]{\frac{k \%}{100(r+2) - k \% (r+1)}} \quad .(3) \text{ und hieraus}$$

$$d_o^3 = \vartheta^3 \frac{100(r+2) - k \% (r+1)}{k \%} \quad (4). \quad (4) \text{ in (2) eingesetzt, gibt}$$

$$\frac{d_o^3}{8a_s^3} = \frac{\vartheta^3}{8a_s^3} \frac{100(r+2) - k \% (r+1)}{k \%} = s + \frac{k}{r+2}; \text{ hieraus ist } \frac{1}{a_s^3} =$$

$$= \left( s + \frac{k}{r+2} \right) \frac{k \%}{\vartheta^3} \cdot \frac{1}{100(r+2) - k \% (r+1)}. \text{ Eingesetzt in (1)} \quad \vartheta^3 =$$

$$= d_{1/v}^3 + \frac{\left( \frac{h}{v} - s \right) \vartheta^3 [100(r+2) - k \% (r+1)]}{\left( s + \frac{k}{r+2} \right) k \%}$$

$$\vartheta^3 = d_{1/v}^3 + \left( \frac{h}{v} - s \right) \frac{1}{s + \frac{k}{r+2}} \frac{\vartheta^3}{k \%} [100(r+2) - k \% (r+1)]$$

$$d_{1/v}^3 = \vartheta^3 \left\{ 1 - \frac{\left( \frac{h}{v} - s \right) [100(r+2) - k \% (r+1)]}{k \% \left( s + \frac{k}{r+2} \right)} \right\} \text{ Zähler und Nenner}$$

des Bruches durch  $h$  dividiert und mit 100 multipliziert und für

$$\frac{100k}{h} = k \% ; \quad \frac{100s}{h} = s \% ; \quad s \% + k \% = 100 \text{ gesetzt, gibt nach}$$

$$\text{entsprechender Umformung } d_{1/v} = \vartheta \sqrt[3]{\frac{r+2}{k} \left( 100 - \frac{100}{v} \right) - (r+1)}$$

$$\text{und } \vartheta = \frac{d_{1/v}}{\sqrt[3]{\frac{r+2}{k\%} \left(100 - \frac{100}{v}\right) - (r+1)}}$$

$$g = \frac{g_{1/v}}{\left[ \frac{r+2}{k\%} \left(100 - \frac{100}{v}\right) - (r+1) \right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Setzt man nun für  $v = 2$ , dann

$$\text{erhält man: } g = \frac{g_{1/2}}{\left[ \frac{50(r+2)}{k\%} - (r+1) \right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Setzt man nun auch in der

bereits zitierten Formel für  $n = 4$ , so erhält man:

$$g_0 = \frac{g_{1/4}}{\left\{ 1 - \frac{25(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]} \right\}^{\frac{2}{3}}}.$$

Durch Division beider Formeln ergibt sich:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{g_{1/2}}{g_{1/4}} \cdot \frac{\left[ 1 - \frac{25(r+2)}{100(r+2) - (r+1)k\%} \right]^{\frac{2}{3}}}{\left[ \frac{50(r+2)}{k\%} - (r+1) \right]^{\frac{2}{3}}}$$

Setzt man nun diesen Wert in die S. 86 abgeleitete Formel

$$\frac{g}{g_0} = \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

ein, so erhält man

$$\frac{g_{1/2}}{g_{1/4}} = \left\{ \frac{\frac{50(r+2)}{k\%} - (r+1)}{\left[ \frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1) \right] \left[ 1 - \frac{25(r+2)}{100(r+2) - (r+1)k\%} \right]} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

Durch Umformen dieses Ausdrückes ergibt sich

$$\frac{g_{1/2}}{g_{1/4}} = \left[ \frac{50(r+2) - k\%(r+1)}{75(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Hieraus ist  $k\%$  als Funktion von

$\frac{g_{1/2}}{g_{1/4}}$  und  $r$  zu rechnen. Bezeichnet man mit  $q_{1/4}$  den Durchmesser-

quotienten  $\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}}$ , dann ist  $k\% = \frac{25(r+2)(3q_{1/4}^3 - 2)}{(r+1)(q_{1/4}^3 - 1)}$ . Setzt man diesen

Wert in die Formel für 1000  $F_o$  ein, so erhält man:

$$1000 F_o = 600 - 6 \cdot \frac{25(r+2)(3q_{i/1}^3 - 2)(r+1)}{(r+1)(q_{i/1}^3 - 1)(r+2)}.$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{1,5}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{\frac{25(r+2)(3q_{i/1}^3 - 2)}{(r+1)(3q_{i/1}^3 - 1)}} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}$$

Nach entsprechender Umformung erhält man:

$$1000 F_o = 600 - \frac{150(3q_{i/1}^3 - 2)}{q_{i/1}^3 - 1} \left[ 1 - \frac{1,5}{(r+3,5)(r+1)^2} \left( \frac{3q_{i/1}^3 - 2}{q_{i/1}^3 - 1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$$

Diese Formel gilt aber nur so lange, als der Durchmesser  $d_{i/2}$  im astfreien Schaftteil liegt, also für  $0 < k\% < 50\%$ , denn nur dieser Fall entspricht den Bedingungen der Ableitung.

Liegt  $d_{i/2}$  in der Krone und  $d_{i/4}$  noch im astfreien Schaftteil, ist also  $50\% < k\% < 75\%$ , dann muß für die Abhängigkeit von  $g$  und  $g_{i/2}$  eine neue Formel abgeleitet werden.

Unter Berücksichtigung der Formel (3) S. 89 ist

$$\vartheta = \left( \frac{k\%}{50} \right)^{\frac{r+2}{3}} \cdot d_{i/2}$$

Da  $d_o = \sqrt[3]{\frac{d_{i/4}}{1 - \frac{25(r+2)}{100(r+2)-(r+1)k\%}}}$  ist, so ist

$$\frac{\vartheta}{d_o} = \left( \frac{d_{i/2}}{d_{i/4}} \right) \left( \frac{k\%}{50} \right)^{\frac{r+2}{3}} \sqrt[3]{1 - \frac{25(r+2)}{100(r+2)-(r+1)k\%}} = \\ = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)}}.$$

Somit ist

$$\frac{d_{i/2}}{d_{i/4}} = \left( \frac{50}{k\%} \right)^{\frac{r+2}{3}} \sqrt[3]{\left[ \frac{1}{1 - \frac{25(r+2)}{100(r+2)-(r+1)k\%}} \right] \left[ \frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1) \right]}.$$

Hieraus errechnet sich nach entsprechender Umformung

$$q_{1/4} = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = \left( \frac{50}{k\%} \right)^{\frac{r+2}{3}} \left[ \frac{k\%}{75(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Gültig für  $50\% < k\% < 75\%$ .

Da es nicht möglich ist,  $k\%$  als Funktion von  $\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}}$  darzustellen, kann auch keine direkte Formel für 1000  $F_o$  aufgestellt werden, wenn  $50\% < k\% < 75\%$ .

Für ein  $k\% > 75\%$  besteht keine Abhängigkeit zwischen Durchmesserquotienten und Formzahl, da beide Durchmesser im beasteten Schafteil liegen und die Formänderung bei geändertem Kronenprozent nur den unterhalb des unteren Durchmessers  $d_{1/4}$  gelegenen Schafteil beeinflusst. Für so tief beastete Stämme ist also der Durchmesserquotient zur Berechnung der Formzahl  $F_o$  oder  $F_{1/4}$  nicht mehr verwendbar.

Bisher haben wir nur die absolute Formzahl  $F_o$  als Funktion von  $q_{1/4}$  dargestellt. Zur praktischen Anwendung gelangt jedoch die echte Formzahl  $F_{1/4}$ , weshalb sie als Funktion der absoluten und von  $r$  festgelegt werden soll.

Oben wurde die Formel  $F_{1/4} = F_o \frac{g_o}{g_{1/4}}$  abgeleitet. Da in unserem

Fall  $n = 4$  ist, erhalten wir  $F_{1/4} = F_o \frac{g_o}{g_{1/4}}$ . Nun ist  $\frac{g_o}{g_{1/4}}$ , wenn in der

Formel S. 84 für  $n = 4$  gesetzt wird,

$$\frac{g_{1/4}}{g_o} = \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{25(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]} \right\}^{\frac{1}{3}}} \text{ daher}$$

$$F_o = \frac{F_{1/4}}{\left\{ 1 - \frac{25(r+2)}{[100(r+2) - (r+1)k\%]} \right\}^{\frac{1}{3}}} \quad \text{Setzen wir nun für } k\% =$$

$$= \frac{25(r+2)(2q_{1/4}^3 - 2)}{(r+1)(q_{1/4}^3 - 1)}, \text{ was jedoch nur für } 0 < k\% < 50\% \text{ gilt, dann}$$

$$\text{erhalten wir } F_{1/4} = F_o \left\{ 1 - \frac{25(r+2)}{\left[ 100(r+2) - \frac{(r+1)25(r+2)(2q_{1/4}^3 - 2)}{(r+1)(2q_{1/4}^3 - 1)} \right]} \right\}.$$

Durch Umformung ergibt sich  $F_{1/4} = F_o (2 - q_{1/4})^{2/3}$  und hieraus

$$1000 F_{1/4} = (2 - q_{1/4})^2 \left\{ 600 - \frac{150 (2 q_{1/4}^3 - 2)}{q_{1/4}^3 - 1} \left[ 1 - \frac{1,5}{(r + 1,5)(r + 1)^{2/3}} \left( \frac{2 q_{1/4}^3 - 2}{q_{1/4} - 2} \right)^2 \right] \right\}.$$

Gültig für  $0 < k\% < 50\%$ .

Für Kronenprozente, welche zwischen 50 und 75 liegen, lässt sich, wie wir gesehen haben, explizite keine Abhängigkeit zwischen  $k\%$  und  $q_{1/4}$  aufstellen, daher auch keine direkte Formel zur Berechnung von  $F_{1/4}$  als Funktion von  $q_{1/4}$ . Wir sind auf numerische Ermittlungs-methoden angewiesen:

Aus der Formel  $q_{1/4} = \left( \frac{50}{k\%} \right)^{\frac{r+2}{3}} \left[ \frac{k\%}{75(r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{1}{3}}$  erhält

man durch Einsetzen für  $k\%$  die entsprechenden Werte von  $q_{1/4}$ . Nach der Formel S. 84 ist  $1000 F_o$  als Funktion des Kronenprozentes bekannt, somit auch bei gleichem Kronenprozente die einander entsprechenden Werte von  $q_{1/4}$  und  $1000 F_o$ . Ebenso ist  $F_{1/4}$  als Funktion von  $F_o$  und dem Kronenprozente bekannt, daher können auch hier die einander zugeordneten Werte von  $F_{1/4}$  und  $q_{1/4}$  bestimmt werden.

Auch für Kronenprozente zwischen 0 und 50 ist diese numerische Auswertung wertvoll, da gleichzeitig die den einzelnen Formzahlen entsprechenden Kronenprozente bekannt werden, was ja nach der direkten Formel nicht der Fall ist.

Für Kronenprozente über 75% besteht, wie bereits erwähnt, keine Abhängigkeit der Formzahl vom Durchmesserquotienten  $q_{1/4}$ .

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in der nachstehenden Tabelle 39 zusammengestellt.

**Tabelle 39.**

$q_{1/4}$	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77
$r = 1$	567	568	570	572	574	577	580	583	587	591	596
$r = 0,5$	—	—	—	—	—	592	593	595	597	601	605
$r = 0$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	622
$q_{1/4}$	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	
$r = 1$	601	607	614	622	632	642	656	673	692	720	
$r = 0,5$	610	615	621	628	637	647	660	676	697	721	
$r = 0$	624	627	632	637	644	653	664	678	697	721	

### δ) Die Brusthöhenformzahl.

Die Formel zur Berechnung der Brusthöhenformzahl lässt sich folgendermaßen ableiten:

Die Schaftmasse  $m = f_0 g_0 h = fgh$ , daraus  $f = f_0 \frac{g_0}{g}$ . Solange der Brusthöhendurchmesser im astfreien Schaftheil liegt, ist für den Träger gleichen Biegungswiderstandes

$$d = 2a_s \sqrt[3]{S} = 2a_s \left( S + \frac{k}{r+2} - 1,3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad \frac{d_0}{d} = \left( \frac{S + \frac{k}{r+2}}{S + \frac{k}{r+2} - 1,3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$d_0 = 2a_s \left( S + \frac{k}{r+2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Setzt man die astfreie Schaftlänge  $s = h - k$ , ferner  $\frac{100k}{h} = k\%$  und formt um, dann erhält man:

$$\frac{d_0}{d} = \left[ \frac{100(r+2) - k\%(r+1)}{100 \left( 1 - \frac{1,3}{h} \right) (r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{1}{3}} \text{ oder}$$

$$\frac{g_0}{g} = \left[ \frac{100(r+2) - k\%(r+1)}{100 \left( 1 - \frac{1,3}{h} \right) (r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Setzt man nun für

$$1000F_0 = 600 - 6k\% \left( \frac{r+1}{r+2} \right) \left\{ 1 - \frac{1,5}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}$$

dann ergibt sich

$$1000f = 600 - 6k\% \left( \frac{r+1}{r+2} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{r+3,5} \left[ \frac{1}{\frac{100(r+2)}{k\%} - (r+1)} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[ \frac{100(r+2) - k\%(r+1)}{100 \left( 1 - \frac{1,3}{h} \right) (r+2) - k\%(r+1)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Hieraus errechnet sich die nachstehende Tabelle 39 a.

Da die Ableitung der partiellen Differentialquotienten und insbesondere die numerische Ausrechnung für die einzelnen Werte von  $k\%$  und  $r$  sehr umständlich wäre, sollen die partiellen Differentialquotienten punktweise durch Verwandlung in den Differenzquotienten ausgewertet werden. Es wird dann

$$dF = \Delta F, \frac{\delta F}{\delta k\%} = \frac{F_{k_1 \%} - F_{k_2 \%}}{k_1 \% - k_2 \%}, \quad \frac{\delta F}{\delta r} = \frac{F_{r_1} - F_{r_2}}{r_1 - r_2};$$

$$\Delta F = \frac{F_{k_1 \%} - F_{k_2 \%}}{k_1 \% - k_2 \%} dk\% + \frac{F_{r_1} - F_{r_2}}{r_1 - r_2} dr.$$

Setzt man nun die Funktion  $F(k\%, r) = f$  (Formzahl), dann erhält man:

$$\Delta f = \frac{f_{k_1 \%} - f_{k_2 \%}}{k_1 \% - k_2 \%} dk\% + \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{r_1 - r_2} dr.$$

Da es bequemer für die praktische Anwendung ist, mit Verhältniswerten — z. B. mit Fehlerprozenten — statt mit den absoluten Fehlerwerten zu arbeiten, soll statt  $\Delta f$  das Verhältnis  $\frac{\Delta f}{f}$  berechnet werden.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_{k_1 \%} - f_{k_2 \%}}{f} \cdot \frac{dk\%}{k_1 \% - k_2 \%} + \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f} \cdot \frac{dr}{r_1 - r_2}.$$

Hierin bedeutet  $f$  die Formzahl für den Mittelwert von  $k_1\%$  und  $k_2\%$ , sowie von  $r_1$  und  $r_2$ . Setzt man nun statt der Differentiale die Fehler, quadriert und addiert sie, dann erhält man nach Ziehen der Wurzel:

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \sqrt{\left( \frac{f_{k_1 \%} - f_{k_2 \%}}{f} \cdot \frac{\Delta k\%}{k_1 \% - k_2 \%} \right)^2 + \left( \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f} \cdot \frac{\Delta r}{r_1 - r_2} \right)^2}$$

Wenn man nun die Werte von  $f k_1\%$  und  $f k_2\%$  so wählt, daß sie um  $\Delta k\%$  auseinanderliegen, dann wird  $\Delta k\% = k_1\% - k_2\%$

$$\text{oder } \frac{\Delta k\%}{k_1 \% - k_2 \%} = 1.$$

Dasselbe gilt für  $\frac{\Delta r}{r_1 - r_2}$ . Es ergibt sich somit

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \sqrt{\left( \frac{f_{k_1 \%} - f_{k_2 \%}}{f} \right)^2 + \left( \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f} \right)^2}$$

Nun ist aber nicht der Formzahlfehler allein, sondern der Fehler des Produktes  $gf$  zu bestimmen. Das totale Differential  $dgf = gdf + f dg$ ;  $\frac{dgf}{gf} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}$ . Das Differential der Kreisfläche ergibt sich

aus dem Differential des Durchmessers  $g = d^2 \frac{\pi}{4}$ ,  $dg = \frac{\pi}{2} d dd$ ,

$$\frac{dg}{g} = \frac{\frac{\pi}{2} d}{\frac{\pi}{4} d^2} dd = 2 \frac{dd}{d}.$$

Somit ist  $\frac{dgf}{gf} = \frac{df}{f} + 2 \frac{dd}{d}$ . Setzt man nun auch hier statt der Differentiale die Fehler, für  $\frac{df}{f}$  den oben errechneten Wert  $\frac{\Delta f}{f}$  quadriert, addiert und zieht die Wurzel, dann erhält man:

$$\frac{\Delta g f}{gf} = \pm \sqrt{\left( \frac{f_{k_1} - f_{k_2}}{f} \right)^2 + \left( \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f} \right)^2 + \left( \frac{2 \Delta d}{d} \right)^2}$$

Für die Formzahl als Funktion des Durchmesserquotienten  $q_{z_i} = \frac{d_{i/2}}{d_{i/4}}$  muß, wie schon erwähnt, der Fehler gesondert berechnet werden. Die Schwankung von  $d_{i/4}$  wirkt sich sowohl auf die Grundfläche als auch auf die Formzahl aus. Die hiedurch entstehenden Fehler stehen hinsichtlich ihrer Größe und ihres Vorzeichens im Zusammenhang und müssen gemeinsam untersucht werden.

1. Der Einfluß des Fehlers von  $d_{i/4}$ :  $\Delta d_{i/4}$

$$q_{z_i} = \frac{d_{i/2}}{d_{i/4}}, \quad d q_{z_i} = \frac{-d_{i/2}}{(d_{i/4})^2} \cdot dd_{i/4} = -q_{z_i} \frac{dd_{i/4}}{d_{i/4}}; \quad dd_{i/4} = \Delta d_{i/4},$$

$$dq_{z_i} = \Delta q_{z_i} = -q_{z_i} \frac{\Delta d_{i/4}}{d_{i/4}} \quad q_{z_i} + \Delta q_{z_i} = q_{z_i} \left( 1 - \frac{\Delta d_{i/4}}{d_{i/4}} \right).$$

Aus diesem Fehler des Durchmesserquotienten läßt sich der Formzahlfehler  $\Delta f$  ermitteln:  $\Delta f = f q_{z_i} - f q_{z_i} + \Delta q_{z_i}$ .

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_{q_{z_i}} - f_{q_{z_i}} + \Delta q_{z_i}}{f} = \frac{\Delta f_{d_{i/4}}}{f}. \quad .(1)$$

(Da  $f_{q_{z_i}}$  stets kleiner ist als  $f_{q_{z_i}} + \Delta q_{z_i}$ , ergibt diese Formel stets negative Werte.)

Nun ist aber  $dgf = g df + f dg$  und  $\frac{\Delta g f}{gf} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta g}{g}$  (2)

Setzt man Formel (1) in (2) ein und beachtet, daß  $\frac{dg}{g} = 2 \frac{dd}{d}$  ist, dann

$$\text{ergibt sich } \frac{\Delta g f}{gf} = \frac{\Delta f_{d_{i/4}}}{f} + 2 \frac{\Delta d_{i/4}}{d_{i/4}}. \quad .(3)$$

2. Der Einfluß des Fehlers von  $d_{1/2}$   $\Delta d_{1/2}$ .

Die Ableitung der Formel geschieht analog Formel (1) und ergibt:

$$\frac{\Delta g_f}{g_f} = \frac{\Delta f_{1/2}}{f}. .(4)$$

3. Der Einfluß des Fehlers von  $r$   $\Delta r$ .

Die Schwankung von  $r$  ist in gleicher Weise zu berücksichtigen, wie in der für die echten Formzahlen abgeleiteten Formel:

$$\frac{\Delta g_f}{g_f} = \frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f}. .(5)$$

4. Durch Summieren der Fehlerquadrate (3) bis (5) und Ziehen der Quadratwurzel ergibt sich der Gesamtfehler für die Formgrundfläche  $g f_{1/2}$  als Funktion des Durchmesserquotienten:

$$\frac{\Delta g_f}{g_f} = \pm \sqrt{\left(\frac{f_{r_1} - f_{r_2}}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f d_{1/4}}{f} + 2 \frac{\Delta d_{1/4}}{d_{1/4}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f_{1/2}}{f}\right)^2}$$

Nach Ableitung der Formel ist es nunmehr notwendig, Annahmen über die Größe der Beobachtungsfehler zu treffen. Als beobachtete Größen kommen in Betracht: der Potenzexponent der Kronenparabel  $r$ , das Kronenprozent  $k\%$  und die Durchmesser  $d$ .

Wie bereits erwähnt, wird in den Formzahlformeln  $r = 0,5$  konstant angenommen. Tatsächlich schwankt aber  $r$  zwischen 0 und 1.

Die Häufigkeit des Vorkommens von  $r$  ist innerhalb dieses Intervales nicht gleichmäßig verteilt, sondern mehr um 0,5 gehäuft. Allerdings kommen die Grenzwerte nicht so selten vor, wie dies dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz entspricht. Da bei gleichmäßiger Verteilung der mittlere Fehler  $2/3$  des Größtwertes, bei Verteilung nach dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz  $1/3$  wäre, soll er hier mit  $1/2$  als zwischen beiden liegend angenommen werden. Der Berechnungsvorgang ist somit der, daß die Formzahlen für  $r_1 = 0$  und  $r_2 = 1$  bestimmt werden und daß nur  $1/4$  der Differenz für die Bestimmung

von  $\frac{\Delta g_f}{g_f}$  in Rechnung gestellt wird.

Die Annahme des Beobachtungsfehlers beim Kronenprozent muß ziemlich reichlich bemessen werden, solange keine genauen Untersuchungen darüber angestellt worden sind, in welcher Weise die tatsächlich meßbare Kronenlänge mit der für den Winddruck maßgebenden zusammenhängt. Es wurde daher ein Schwanken innerhalb von  $\pm 10 k\%$  angenommen. Unter Annahme einer gleichen Fehlerverteilung wie für  $r$  ergibt sich ein mittlerer Beobachtungsfehler von  $\pm 5 k\%$ .

Zur Berechnung des Durchmesserfehlers kann auf Grund durchgeführter Vergleiche (S. 36) ein Höchstwert von etwa  $\pm 10$  mm und ein Mittelwert von  $\pm 3,3$  mm für die Differenzen zwischen berechnetem und gemessenem Durchmesser angenommen werden. Bei einer angenommenen Abrundung der gemessenen Durchmesser auf ganze Zentimeter ist außerdem noch der mittlere Abrundungsfehler von  $\pm 5$  mm zu berücksichtigen. Es ergibt sich somit ein mittlerer Durchmesserfehler

$$\Delta d = \pm 3,3^2 + \left( \frac{2,5}{3} \right)^2 = \pm 4,71 \text{ mm.}$$

Mit Hilfe dieser Fehlerwerte und der oben abgeleiteten Formeln sind nun die zu erwartenden mittleren Fehler des Produktes gf berechnet und in den folgenden Tabellen 40—42 als mittlere Fehlerprozente zusammengestellt worden.

**Tabelle 40.**  
gf-Fehlerprozente in Brusthöhe.

h	d	k%	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	10	10,8	10,8	10,7	10,7	10,6	10,6	10,6	10,4	10,2	10,2	10,2	10,2
20		11,2	11,0	11,0	10,9	11,0	11,0	11,0	10,9	10,9	10,8	10,8	10,7
30		11,1	11,0	11,0	11,0	11,0	11,1	11,1	11,1	11,0	10,9	10,9	10,9
40		11,0	11,0	11,0	11,1	11,1	11,2	11,3	11,0	11,1	11,0	11,1	11,1
50		11,0	11,0	11,0	11,0	11,1	11,3	11,3	11,3	11,2	11,1	11,1	11,1
10	20	7,1	7,0	7,0	6,9	6,8	6,8	6,7	6,5	6,2	6,1	6,1	6,1
20		7,6	7,4	7,3	7,3	7,3	7,4	7,4	7,3	7,2	7,0	6,9	6,9
30		7,5	7,4	7,3	7,3	7,4	7,5	7,6	7,6	7,5	7,3	7,3	7,3
40		7,4	7,4	7,4	7,4	7,5	7,6	7,8	7,6	7,6	7,4	7,6	7,6
50		7,4	7,4	7,4	7,4	7,6	7,8	7,7	7,7	7,7	7,5	7,6	7,6
10	30	6,2	6,1	6,0	6,0	5,9	5,8	5,7	5,4	5,1	5,0	5,0	5,0
20		6,7	6,5	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,4	6,3	6,1	6,0	6,0
30		6,6	6,5	6,4	6,4	6,5	6,7	6,8	6,7	6,6	6,4	6,4	6,4
40		6,5	6,5	6,5	6,5	6,6	6,8	6,9	6,6	6,7	6,6	6,6	6,6
50		6,5	6,5	6,5	6,5	6,7	6,9	6,9	6,9	6,9	6,7	6,7	6,7
10	40	5,8	5,7	5,6	5,5	5,5	5,5	5,4	5,0	4,7	4,5	4,5	4,5
20		6,4	6,2	6,1	6,0	6,1	6,1	6,2	6,0	5,9	5,7	5,6	5,6
30		6,3	6,1	6,1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,4	6,2	6,0	6,0	6,0
40		6,2	6,1	6,1	6,1	6,3	6,5	6,6	6,4	6,4	6,2	6,3	6,3
50		6,2	6,1	6,1	6,2	6,4	6,6	6,6	6,6	6,5	6,3	6,4	6,4
10	50	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,3	5,2	4,8	4,5	4,3	4,3	4,3
20		6,2	6,0	5,9	5,9	5,9	6,0	6,0	5,9	5,8	5,5	5,4	5,4
30		6,1	6,0	5,9	5,9	6,0	6,2	6,3	6,3	6,1	5,8	5,9	5,9
40		6,0	6,0	6,0	5,9	6,1	6,3	6,5	6,2	6,2	6,1	6,1	6,1
50		6,0	6,0	6,0	6,0	6,2	6,5	6,4	6,4	6,4	6,2	6,2	6,3

**Tabelle 41.**  
gf-Fehlerprozente von  $f_{q^2/1}$ .

$q^2/1$	0,873	0,860	0,845	0,825	0,799	0,763	0,732	0,715	0,713	0,713	0,713
$d_{1/4} \backslash k\%$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5	14,3	15,3	16,7	19,3	15,3	15,8	17,2	18,2	18,2	18,2	18,2
10	7,9	10,1	11,9	8,9	7,5	7,6	8,8	9,6	9,7	9,7	9,7
20	4,2	8,7	6,6	4,5	3,7	4,0	4,6	5,1	5,2	5,2	5,2
30	2,8	5,7	4,4	2,7	2,6	2,7	3,2	3,7	3,9	3,9	3,9
40	1,9	4,2	3,6	2,1	2,0	2,3	2,9	3,1	3,3	3,3	3,3

Um die Fehlerprozente besser miteinander vergleichen zu können, wurde die folgende Fehlertafel derart berechnet, daß für die Fehlerberechnung der höher am Stamme gelegenen Formgrundflächen jene Durchmesser zugrunde gelegt wurden, die ungefähr den Durchmessern in Brusthöhe von 10, 20, 30, 40 und 50 cm entsprechen. Für das Fehlerprozent von gf in Brusthöhe wurde jeweils der 100fache Durchmesser als Stammhöhe angenommen.

**Tabelle 42.**  
gf-Fehlerprozente für  $gf_{1/10}$ ,  $gf_{1/4}$  und  $gf_{1/2}$ .

d	$f \backslash k\%$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	$f_{1/10}$	10,9	10,9	10,8	10,7	10,8	10,9	10,8	10,6	10,5	10,5	10,3
	$f_{1/4}$	10,6	10,4	10,3	10,2	10,1	9,9	9,7	9,7	9,7	9,6	9,6
	$f_{1/2}$	9,5	9,5	9,4	9,6	10,6	11,7	11,4	10,8	10,8	10,8	10,8
20	$f_{1/10}$	7,2	7,2	7,1	7,0	7,1	7,3	7,1	6,7	6,6	6,6	6,3
	$f_{1/4}$	6,7	6,5	6,3	6,0	5,9	5,6	5,3	5,3	5,2	5,0	5,0
	$f_{1/2}$	5,0	4,8	4,7	5,1	6,7	8,4	7,9	7,1	7,0	7,1	7,1
30	$f_{1/10}$	6,3	6,2	6,2	6,0	6,2	6,4	6,2	5,6	5,6	5,6	5,2
	$f_{1/4}$	5,7	5,5	5,2	4,9	4,8	4,3	3,9	4,0	3,8	3,6	3,6
	$f_{1/2}$	3,5	3,3	3,1	3,7	5,7	7,6	7,1	6,2	6,1	6,2	6,2
40	$f_{1/10}$	6,0	5,9	5,8	5,6	5,8	6,0	5,8	5,3	5,2	5,2	4,8
	$f_{1/4}$	5,3	5,1	4,8	4,4	4,3	3,8	3,3	3,4	3,2	2,9	2,8
	$f_{1/2}$	2,8	2,5	2,3	3,1	5,4	7,3	6,8	5,8	5,7	5,8	5,8
50	$f_{1/10}$	5,8	5,7	5,7	5,4	5,6	5,9	5,6	5,2	5,0	5,0	4,5
	$f_{1/4}$	5,1	4,9	4,6	4,2	4,0	3,5	3,0	3,1	2,9	2,5	2,5
	$f_{1/2}$	2,4	2,1	1,9	2,8	5,2	7,2	6,6	5,7	5,5	5,6	5,6

**Tabelle 43.**  
gf-Fehlerprozente.

$\frac{k}{d_{1/3}} \%$		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	gf <sub>1,3</sub>	10,8	10,8	10,7	10,7	10,6	10,6	10,6	10,4	10,2	10,2	10,2
	gf <sub>1/10</sub>	10,9	10,9	10,8	10,7	10,8	10,9	10,8	10,6	10,5	10,5	10,3
	gf <sub>1/4</sub>	12,1	12,0	11,8	11,7	11,6	11,4	11,3	11,3	11,3	11,2	11,2
	gfq <sub>2/1</sub>	9,8	11,7	13,3	12,0	9,9	10,1	11,5	12,6	12,9	12,9	12,9
	gf <sub>1/2</sub>	11,8	11,8	11,7	11,9	12,7	13,6	13,3	12,9	12,8	12,9	12,9
20	gf <sub>1,3</sub>	7,6	7,4	7,3	7,3	7,3	7,4	7,4	7,3	7,2	7,0	6,9
	gf <sub>1/10</sub>	7,2	7,2	7,1	7,0	7,1	7,3	7,1	6,7	6,6	6,6	6,3
	gf <sub>1/4</sub>	7,3	7,1	6,9	6,7	6,6	6,3	6,0	6,0	5,9	5,8	5,7
	gfq <sub>2/1</sub>	5,3	9,1	8,7	5,9	5,3	5,0	5,8	6,7	6,5	6,5	6,5
	gf <sub>1/2</sub>	6,4	6,3	6,2	6,6	7,9	9,3	8,9	8,2	8,1	8,2	8,2
30	gf <sub>1,3</sub>	6,6	6,5	6,4	6,4	6,5	6,7	6,8	6,7	6,6	6,4	6,4
	gf <sub>1/10</sub>	6,3	6,2	6,2	6,0	6,2	6,4	6,2	5,6	5,6	5,6	5,2
	gf <sub>1/4</sub>	6,0	5,8	5,6	5,3	5,1	4,7	4,4	4,4	4,3	4,0	4,0
	gfq <sub>2/1</sub>	3,6	7,0	5,4	3,5	2,8	3,3	3,8	4,3	4,5	4,5	4,5
	gf <sub>1/2</sub>	4,9	4,8	4,7	5,1	6,7	8,4	7,9	7,1	7,0	7,1	7,1
40	gf <sub>1,3</sub>	6,2	6,1	6,1	6,1	6,3	6,5	6,6	6,4	6,4	6,2	6,3
	gf <sub>1/10</sub>	6,0	5,9	5,8	5,6	5,8	6,0	5,8	5,3	5,2	5,2	4,8
	gf <sub>1/4</sub>	5,5	5,3	5,0	4,7	4,5	4,0	3,6	3,7	3,5	3,2	3,2
	gfq <sub>2/1</sub>	2,4	5,1	4,1	2,4	2,3	2,5	3,1	3,4	3,6	3,6	3,6
	gf <sub>1/2</sub>	3,5	3,3	3,2	3,6	5,8	7,6	7,1	6,2	6,1	6,2	6,2
50	gf <sub>1,3</sub>	6,0	6,0	6,0	6,0	6,2	6,5	6,4	6,4	6,4	6,2	6,3
	gf <sub>1/10</sub>	5,8	5,7	5,7	5,4	5,6	5,9	5,6	5,2	5,0	5,0	4,5
	gf <sub>1/4</sub>	5,3	5,0	4,8	4,4	4,2	3,7	3,2	3,3	3,1	2,8	2,7
	gfq <sub>2/1</sub>	1,7	3,9	3,4	2,0	1,9	2,1	2,8	3,0	3,1	3,1	3,1
	gf <sub>1/2</sub>	3,1	2,9	2,6	3,3	5,5	7,4	6,9	6,0	5,8	5,9	5,9

Da die Fehlerprozente der Formgrundfläche mit Ausnahme von  $gf_{1/2}$  für die in Betracht kommenden Kronenprozente nicht sehr stark schwanken, kann die kleine Fehlertafel 44 für überschlägige Berechnungen aufgestellt werden.

Überblickt man das Ergebnis der Fehlerrechnung (Tabelle 43), dann fällt in erster Linie der ziemlich hohe Wert des mittleren Fehlerprozentes auf. Da der Fehler im Einzelfalle bis zum Dreifachen dieses Wertes ansteigen kann, ergibt sich eine Bestätigung der schon aus

der Praxis bekannten Tatsache, daß die Verwendung von Formzahlen für die Massenermittlung des Einzelstammes zu ungenau ist.

Der Vergleich der einzelnen Formzahlarten zeigt, daß sie umso genauer sind, in je größerer Höhe die Durchmesser liegen. Besonders günstig verhalten sich die aus dem Durchmesserquotienten ermittelten Formgrundflächen; sie sind um etwa die Hälfte genauer als die mit Hilfe des Kronenprozenten ermittelten Formgrundflächen in gleicher Höhe.

**Tabelle 44.**

Kleine Fehlertabelle.

gf \ d	10	20	30	40	50
gf <sub>1,3</sub>	11,0	7,4	6,5	6,2	6,0
gf <sub>1/10</sub>	10,8	7,2	6,2	5,9	5,7
gf <sub>1/4</sub>	10,3	6,3	5,2	4,8	4,5
gf <sub>1/2</sub>	9,4	4,8	3,3	2,5	2,0

Vergleicht man die Anteile der Fehler der einzelnen Beobachtungsgrößen — r, k%, d — am Gesamtfehlerprozent für die tatsächlich in Betracht kommenden Werte, dann ergibt sich, daß die Schwankung von r — also die Verschiedenheit der Kronenform — den geringsten Einfluß hat. Der Einfluß der Fehler des Durchmessers und des Kronenprozenten ist — sehr angenähert — gleich groß, schwankt aber im Einzelfalle stark. Für kleine hochgelegene Durchmesser überwiegt der Durchmesserfehler so stark, daß er z. B. für gf<sub>1/2</sub> nahezu allein ausschlaggebend ist. Sollte es durch eingehende Untersuchungen möglich sein, den Fehler des Kronenprozenten herabzudrücken, dann würde dadurch vor allem die Genauigkeit jener Formgrundflächen gesteigert werden, die sich auf einen tiefer gelegenen Durchmesser beziehen. Gerade diese sind aber praktisch bedeutungsvoll.

**c) Vergleich mit Messungen.**

Die bisher veröffentlichten Formzahltafeln lassen sich nur zum geringen Teil zu Vergleichen heranziehen, weil bei ihrer Aufstellung das Kronenprozent nicht berücksichtigt wurde.

Eine Ausnahme hiervon machen die Untersuchungen Kunzes über die echte Formzahl in  $1/_{20}$  der Höhe und Schiffels Durchmesserquotient.

Der Vergleich mit Kunzes Formzahlen ist allerdings wenig beweiskräftig, weil sich die Meßstellen fast durchwegs im Bereich des Wurzelanlaufes befinden, wodurch höhere Durchmesser gemessen werden, als sie den Metzgerschen Stammformen entsprechen, und demgemäß niedrigere Formzahlwerte erhalten werden.

In der nachstehenden Tabelle sind Kunzes Formzahlen auszugsweise und in Mittelwerten den berechneten Formzahlen gegenübergestellt. Sie sind, wie erwartet, höher, verlaufen aber durchaus parallel.

**Tabelle 45.**

Holzart		unter 25 k%	25—45 k%	45—65 k%	65—85 k%
Kiefer	{ Messung . . . . . Berechnung . . . . .	436 555	434 524	417 489	
Fichte	{ Messung . . . . . Berechnung . . . . .	519 555	512 524	499 489	470 465
Buche	{ Messung . . . . . Berechnung . . . . .	482 555	475 524	463 489	

Ein wesentlich geeigneteres Vergleichsobjekt bieten Schiffels Formzahlen als Funktion des Durchmesserquotienten. In seinen umfangreichen Untersuchungen hat zwar Schiffel das Hauptaugenmerk auf die Ermittlung des Formquotienten gelegt  $\left( \frac{d_{1/2}}{dm} = q \right)$ , wobei  $dm = \text{Brusthöhendurchmesser}$ ) und auf die Abhängigkeit von diesen, es wurden jedoch überdies noch die Durchmesser  $d_{1/2}$  und  $d_{1/4}$  erhoben, sodaß sich aus seinen Untersuchungen leicht eine Abhängigkeit der Formzahl vom Durchmesserquotienten  $q_{1/4} = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}}$  rekonstruieren läßt. Es ist nur die Abweichung zu berücksichtigen, daß die aus Schiffels Angaben errechnete echte Formzahl auch die durch den Stammfuß bewirkte Massenvermehrung mit berücksichtigt, daher auf jeden Fall größer sein muß, als die auf Grund der vorstehenden Ableitungen errechnete. Die Differenz darf aber nicht größer sein, als die durchschnittliche Massenvermehrung beträgt, d. s. zirka 3—4%.

Der erste Teil des Vergleiches mit den Untersuchungen Schiffels besteht darin, festzustellen, daß auch Schiffels Formzahl  $F_{1/4}$  als Funktion von  $q_{1/4}$  dargestellt, unabhängig von der Höhe ist. In der

von Schiffel gewählten Darstellung  $F_{1,3} = f(q_2)$  spielt ja, da ein in einer konstanten Höhe gemessener Durchmesser vorkommt, die Höhe eine hervorragende Rolle, bei Inbezugsetzung der Formzahl mit  $d_{1/4}$ ,  $F_{1/4} = f(q_{1/4})$ , müßte jedoch dieser Einfluß verschwinden.

Hiebei wurde folgender Vorgang eingehalten:

1. Es wurden Durchmesserquotienten angenommen, die über den ganzen Bereich von 0,68 bis 0,87 verteilt waren und auch die extremsten Verhältnisse beinhalten. Diese Annahmen waren:  $q_{1/4} = 0,68, 0,73, 0,78, 0,83, 0,87$ .

2. In Schiffels Werk: Form und Inhalt der Fichte, das sich auf die Messung von 2529 Probestämmen stützt und das diesem Vergleich zugrunde gelegt wurde, befinden sich graphische Darstellungen, welche die Abhängigkeit von  $q_1, q_2, q_3$  untereinander und von der

Höhe zum Ausdruck bringen. Hiebei bedeutet  $q_1 = \frac{d_{1/4}}{dm}, q_2 = \frac{d_{1/2}}{dm}, q_3 = \frac{d_{3/4}}{dm}$ . Es ist somit  $\frac{q_2}{q_1} = \frac{d_{1/2}}{dm} \cdot \frac{dm}{d_{1/4}} = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = q_{1/2}$ . Hieraus ergibt sich  $q_2 = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} q_1$ .

Mit Hilfe dieser Gleichung können in der graphischen Darstellung bei gleicher Höhe die zusammengehörigen Werte von  $q_1$  und  $q_2$  ermittelt werden.

3. Einer anderen graphischen Darstellung konnte die einem bestimmten  $q_2$  und  $h$  zugeordnete Brusthöhenformzahl  $F_{1,3}$  entnommen werden.

4. Schließlich wurde die Brusthöhenformzahl auf Grund folgender Überlegung in die echte Formzahl  $F_{1/4}$  verwandelt:

$$m = ghF_{1,3} = g_{1/4}hF_{1/4}; \frac{g}{g_{1/4}} = \frac{F_{1/4}}{F_{1,3}}, d_{1/4} = dq_1;$$

$$g_{1/4} = d^2 q_1^2 \frac{\pi}{4} = g q_1^2; \frac{g}{g q_1^2} = \frac{F_{1/4}}{F_{1,3}}, F_{1/4} = \frac{F_{1,3}}{q_1^2}.$$

Die in dieser Form angestellten Berechnungen, bei denen, wie gesagt, die extremsten in den Graphikas eben noch vertretenen Werte berücksichtigt wurden, ergaben nachstehende, in Tabellenform zusammengestellte Resultate:

**Tabelle 46.**

$q_{2/1} = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = 0,680$					$q_{2/1} = \frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = 0,730$				
$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$	$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$
546	806	17	394	608	547	756	32	363	636
557	821	15	407	605	574	787	26	390	630
568	836	13	422	605	600	822	20	417	620
582	857	11	441	603	627	859	14	452	612
616	906	8	488	596	674	924	8	521	612
$q_{2/1} = 0,780$					$q_{2/1} = 0,830$				
596	766	45	384	655	694	838	45	466	663
612	787	36	401	649	708	853	36	481	660
644	827	27	436	640	733	882	27	512	657
681	873	18	481	634	759	915	18	548	656
736	943	8	560	632	800	963	8	611	656
$q_{2/1} = 0,870$									
795	913	36	572	686					
810	932	28	592	686					
824	947	20	613	686					
838	964	12	635	686					

Die Differenzen zwischen den größten und kleinsten Werten von  $F_{1/4}$  betragen für

$$q_{2/1} = 0,68. \quad 2 \% , \quad q_{2/1} = 0,73 \quad 3,8 \% , \quad q_{2/1} = 0,78. \quad 3,6 \% , \\ q_{2/1} = 0,83. \quad 1,1 \% , \quad q_{2/1} = 0,87 \quad 0 \% .$$

Aber selbst diese geringen Differenzen werden durch das Vorhandensein des Stammfußes vollkommen erklärt, denn gerade mit zunehmender Höhe und Durchmesserquotienten nimmt die prozentuelle Massenvermehrung zu und mit ihr auch folgerichtig  $F_{1/4}$ . Auch das Maß dieser Zunahme mit maximal 3,8% hält sich durchaus innerhalb der beobachteten Grenzen.

Der zweite Teil des Vergleiches bezieht sich auf die aus Schiffels Untersuchungen und auf die auf Grund der Theorie des Trägers gleichen Biegungswiderstandes errechneten Werte. Von den aus Schiffels Formzahltafeln errechneten Werten wurden jeweils die niedrigsten zum Vergleich herangezogen, da diese von der Wirkung des Stammfußes am meisten befreit sind.

Der Vergleich wurde mit einer von mir gefühlsmäßig gezeichneten Mittellinien als Ausgleichslinie für  $r = 1, 0,5$  und 0 angestellt und ergab als mittlere Abweichung  $+2\%$  (max.  $+2,7\%$ ), welche aber nur zum kleineren Teil auf die Massenvermehrung im Stammfuß zurückzuführen sein wird, da dessen Einfluß schon bei der Wahl der Vergleichswerte berücksichtigt wurde. Zum Teil dürfte an diesen Abweichungen die gefühlsmäßig eingezeichnete Ausgleichslinie schuld sein (Fig. 10), zum Teil vielleicht auch die von Schiffel angenommenen Formeln, die die tatsächlichen Verhältnisse nicht ganz zum Ausdruck bringen.

Eine wirklich prinzipielle Abweichung ist nur bei den höchsten Werten des Durchmesserquotienten zu bemerken, also bei Kronenprozenten nahe Null. Hier sind die nach Schiffel errechneten Werte kleiner, als sie der Theorie entsprechen. Auf die hier ursächlichen Erscheinungen wurde schon bei der Besprechung der Stammanalysen hingewiesen (S. 42 u. Fig. 7). Durch Messung der Durchmesser in A und B wird ein vollholzigerer Stamm vorgetäuscht, als tatsächlich vorhanden ist. Es entsteht daher eine niedrigere Formzahl, als dem Durchmesserquotienten theoretisch entsprechen würde. Die Zahl dieser theoretisch nicht erfaßbaren Stämme ist gering, sie beträgt in Schiffels Untersuchungsmaterial zirka 2%.

Der dritte Teil des Vergleiches bezieht sich auf die verschiedenen Holzarten. Da ja die Theorie des Trägers gleichen Biegungswiderstandes naturgemäß auf alle Waldbäume Anwendung findet, müssen auch ihre Formzahlen in die durch die Schwankung von  $r$  angegebenen Grenzen fallen.

Für den Nachweis der Übereinstimmung wurde Schiffels: Form und Inhalt der Tanne, Kiefer und Lärche benutzt. Die Berechnung der Kurven wurde in ähnlicher Weise vorgenommen wie für die Fichte.

Aus den Tabellen kann entnommen werden, daß bei allen untersuchten Holzarten, bei gleichem Durchmesserquotienten  $q_{\text{v}}$ , der Höhe nur ein sehr geringer Einfluß auf die echte Formzahl zukommt, der überdies, wie bei der Fichte, durch den Einfluß des Stammfußes in vollkommen befriedigender Weise erklärt wird.

Die einzelnen Zahlenreihen verlaufen allerdings nicht so ausgeglichen wie bei der Fichte, was wohl auf die geringere Anzahl von Stammanalysen (bei allen drei Holzarten zusammen weniger als bei der Fichte allein) zurückzuführen ist und hier besonders zum Ausdruck kommt, da gerade die extremsten Verhältnisse zum Vergleich herangezogen wurden.

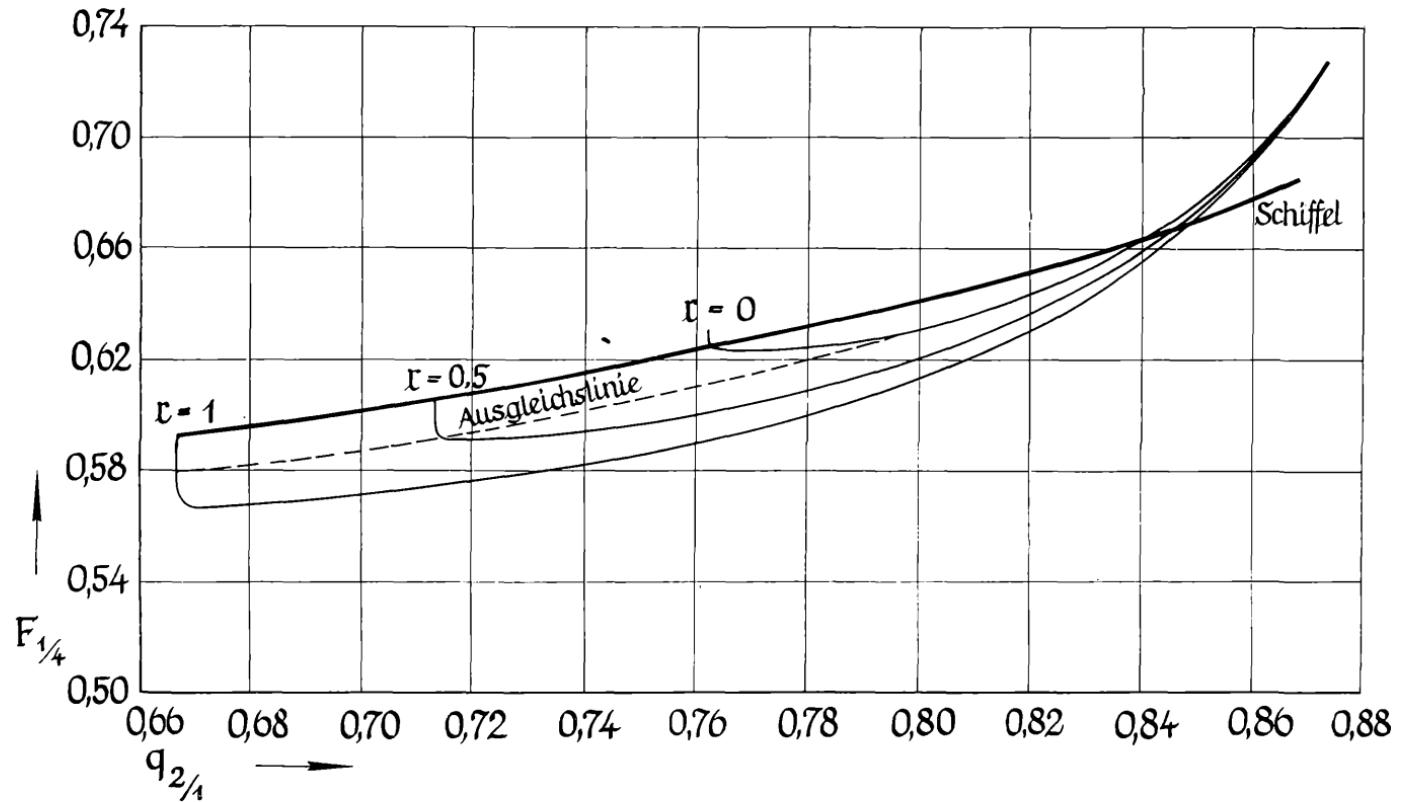


Fig. 10.

Infolge der Unregelmäßigkeiten sind die einzelnen Werte auch untereinander nicht ohne weiteres vergleichbar.

Um dennoch einen Vergleich zu ermöglichen, wurden die Werte bei jenen Stammhöhen, die im Grundlagenmaterial am häufigsten vertreten waren und die daher die geringsten Abweichungen erwarten ließen, in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt und mit den für die Fichte bei gleicher Höhe und gleichem Durchmesserquotienten errechneten verglichen. Die prozentuellen Abweichungen finden sich jeweils in der letzten Kolonne (Tabelle 47—51).

**Tabelle 47.**

Lärche.

$\frac{d_{1/4}}{d_{1/1}} = q_{2/1} = 0,680$					$q_{2/1} = 0,730$				
$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$	$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$
0,58	0,853	7	0,469	0,646	0,66	0,904	6,5	0,530	0,648
0,54	0,794	10	0,403	0,640	0,56	0,767	15,5	0,387	0,656
0,52	0,765	12,5	0,371	0,635	0,54	0,740	22	0,355	0,649
0,50	0,735	16,5	0,337	0,624	0,52	0,713	35	0,323	0,636
$q_{2/1} = 0,780$					$q_{2/1} = 0,830$				
0,74	0,951	6,5	0,587	0,650	0,80	0,964	9,5	0,603	0,650
0,62	0,795	18,3	0,425	0,674	0,70	0,843	22	0,484	0,681
0,60	0,769	25,5	0,399	0,674	0,68	0,819	29	0,461	0,687
0,58	0,744	39	0,371	0,672	0,66	0,796	44	0,435	0,687
$q_{2/1} = 0,870$									
0,80	0,919	27	0,563	0,669					
0,78	0,896	35	0,541	0,675					

Diese Abweichungen sind gering und dürften neben den unvermeidlichen Ausgleichsfehlern und den Abweichungen der nach empirisch aufgestellten Gleichungen berechneten Werte von den beobachteten in der Hauptsache ihre Ursache in der auf verschiedenem Standraum der einzelnen Holzarten beruhenden verschiedenen starken Ausbildung des Stammfußes haben, denn je lichtbedürftiger eine Holzart ist, desto größer ist ihr Standraum bei gleichem Kronenprozent und daher gleichem Durchmesserquotienten, desto größer aber auch der Gesamtwinddruck auf die Krone. Von der Größe dieses Winddruckes ist aber die Massenvermehrung des Stammfußes gegenüber

**Tabelle 48.**

Kiefer.

$\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = q_{2/1} = 0,68$					$q_{2/1} = 0,73$				
$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$	$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$
0,58	0,853	6,75	0,447	0,613	0,64	0,877	8,8	0,487	0,632
0,56	0,823	8,0	0,417	0,613	0,56	0,767	17,0	0,378	0,640
0,54	0,794	9,8	0,386	0,614	0,54	0,739	25,0	0,349	0,638
0,52	0,764	12,3	0,359	0,616	0,52	0,712	40,0	0,322	0,636
$q_{2/1} = 0,78$					$q_{2/1} = 0,83$				
0,70	0,898	8,2	0,525	0,652	0,78	0,939	9,0	0,587	0,666
0,64	0,820	16,0	0,446	0,663	0,72	0,868	17,0	0,513	0,681
0,62	0,795	21,5	0,421	0,666	0,70	0,843	24,5	0,486	0,685
0,60	0,770	32,0	0,396	0,668	0,68	0,819	39,0	0,462	0,688
$q_{2/1} = 0,87$									
0,78	0,897	24	0,557	0,694					
0,76	0,873	40	0,534	0,701					

**Tabelle 49.**

Tanne.

$\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} = q_{2/1} = 0,68$					$q_{2/1} = 0,73$				
$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$	$q_2$	$q_1$	$h$	$F_{1,3}$	$F_{1/4}$
0,58	0,853	7,75	0,441	0,606	0,58	0,794	23,0	0,387	0,614
0,60	0,822				0,60	0,822	14,5	0,420	0,621
0,62	0,850				0,62	0,850	10,5	0,452	0,626
0,64	0,877				0,64	0,877	8,0	0,483	0,629
$q_{2/1} = 0,78$					$q_{2/1} = 0,83$				
0,72	0,923	7,5	0,431	0,642	0,80	0,963	7,7	0,613	0,661
0,68	0,872	12,5	0,461	0,644	0,76	0,916	12,5	0,556	0,663
0,66	0,847	18,0	0,490	0,645	0,74	0,893	17,0	0,530	0,664
0,64	0,820	31,0	0,550	0,646	0,72	0,868	30,0	0,501	0,665
$q_{2/1} = 0,87$									
0,84	0,966	11	0,628	0,674					
0,82	0,942	15	0,601	0,676					
0,80	0,920	23	0,574	0,679					
0,78	0,897	48	0,546	0,679					

Tabelle 50.

## Vergleich der Formzahlen der einzelnen Holzarten.

	q <sub>z/1</sub> = 0,68			q <sub>z/1</sub> = 0,73			q <sub>z/1</sub> = 0,78			q <sub>z/1</sub> = 0,83			q <sub>z/1</sub> = 0,87		
	h	F <sub>1/4</sub>	A%												
Fichte .	8,0	0,596	0	8	0,612	0	8,0	0,632	0	8	0,656	0	12	0,686	0
Kiefer .	12,3	0,616	+ 1,8	25	0,638	+ 1,6	21,5	0,666	+ 4,5	17	0,681	+ 3,8	24	0,694	+ 1,2
Tanne .	7,75	0,606	+ 1,7	23	0,614	— 1,8	31,0	0,642	— 0,3	30	0,665	+ 1,1	23	0,679	— 1,0
Lärche .	16,5	0,624	+ 2,6	22	0,649	+ 4,2	25,5	0,674	+ 5,5	29	0,687	+ 4,3	27	0,669	— 2,5

Tabelle 51.

Für die untersuchten Nadelholzarten wären die den einzelnen Durchmesserquotienten entsprechenden Formzahlen nach der im Graphikton stark gezeichneten Kurve folgende:

dem Schaftparaboloid abhängig. Daraus ist erklärlich, warum in der Gegenüberstellung der einzelnen Holzarten den Lichtholzarten im allgemeinen bei gleichem Durchmesserquotienten und gleicher Höhe eine größere Formzahl zukommt als bei den Schattholzarten.

Die bei der Lärche bei geringen Höhen in Erscheinung tretenden großen Formzahlen dürften auf die Krummwüchsigkeit junger Lärchen zurückzuführen sein, die aus statischen Gründen einen starken Stammfuß verlangt.

Leider kann die Übereinstimmung der angestellten Berechnungen mit Messungsergebnissen an Laubbäumen nicht überprüft werden, da Schiffel auf diese seine Untersuchungen nicht ausgedehnt hat, da wie er im Vorwort zu „Form und Inhalt der Tanne“ sagt, nach seiner Ansicht die Formzahlmethode für Laubholzer nur im beschränkten Maße, mit Sicherheit nur bis zum Kronenansatz anwendbar sei. Diese Ansicht ließe sich auch nach der Metzgerschen Theorie vollkommen dadurch erklären, daß die Kronenkurve — etwa infolge der starken Äste — allzu große Unregelmäßigkeiten aufweist.

Zu den mit Hilfe dieser Formzahlen ermittelten Massen kommt aber noch ein Zuschlag, der der — für jede Holzart verschieden — durch das Vorhandensein eines Stammfußes hervorgerufenen Massenvermehrung Rechnung trägt.

Es ist unmöglich, hiefür eine vollkommen zutreffende Formel aufzustellen, ohne das ganze Grundlagenmaterial zu bearbeiten.

Da aber diese Massenvermehrung nicht sehr groß und wertvoll ist, dürfte auch ein Näherungswert von Nutzen sein.

Als solcher hat sich für  $\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} < 0,85$  ergeben:

$$\text{Tanne und Fichte} \quad \Delta m = \frac{2 \text{ m}}{100}$$

$$\text{Weißkiefer} \quad \Delta m = \frac{4 \text{ m}}{100}$$

$$\text{Lärche} \quad \Delta m = \frac{6 \text{ m}}{100}.$$

Für  $\frac{d_{1/2}}{d_{1/4}} > 0,85$  ist kein Zuschlag nötig.

Da für die übrigen echten Formzahlen und die Brusthöhenformzahl keine geeigneten Untersuchungen vorlagen, wurden Vergleiche mit Messungen an 150 Fichten durchgeführt, deren Maße mir in dankenswerter Weise von der Forstlichen Versuchsanstalt in Mariabrunn überlassen wurden.

Tabelle 52.

	gf <sub>1,3</sub>							
	unter 20 k %	20—25 k %	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma k\% : n$	. 17,9%	n = 19	22,4%	n = 25	27,1%	n = 32	31,5%	n = 24
$\Sigma gf_{1,3}$ gemessen	. 0,3161		0,3977		0,6795		0,6195	
$\Sigma gf_{1,3} : n$	..... 0,01663		0,01588		0,02122		0,02582	
$\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2$	. 24,463	3,141	19,575	3,711	29,619	7,933	18,095	7,964
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n}$ .	..... 0,00359	0,00128	0,00280	0,001226	0,00304	0,00157	0,00275	0,00182
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n} : \frac{\Sigma gf_{1,3}}{n}$ gemessen ..	. $\pm 21,6\%$	$\pm 7,75\%$	$\pm 17,6\%$	$\pm 7,68\%$	$\pm 14,3\%$	$\pm 7,43\%$	$\pm 10,63\%$	$\pm 7,05\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n^2} : \frac{\Sigma gf_{1,3}}{n}$ gemessen ..	.... 4,95%	$\pm 1,78\%$	$\pm 3,5\%$	$\pm 1,53\%$	$\pm 2,53\%$	$\pm 1,31\%$	$\pm 2,18\%$	$\pm 1,44\%$
$\Sigma \Delta gf_{1,3}; \Sigma \Delta gf_{1,3} : \Sigma gf$ .	. + 433 =	+ 13,7%	+ 265 =	+ 6,7%	+ 46 =	+ 0,68%	+ 127 =	+ 2,05%
	35—40 k %		40—50 k %		über 50 k %		Summe	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma k\% :$	. 36,7%	n = 12	43,9%	n = 26	52,7%	n = 12		
$\Sigma gf_{1,3}$ gemessen	. 0,4126		1,1429		0,6784		4,2467	
$\Sigma gf_{1,3} : n$	..... 0,0344		0,0440		0,0565		0,0283	
$\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2$	. 36,895	6,733	43,038	21,365	47,485	16,455	219,170	67,302
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n}$	. 0,00555	0,00237	0,00407	0,00287	0,00629	0,00370	0,00383	0,00212
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n} : \frac{\Sigma gf_{1,3}}{n}$ gemessen	. $\pm 16,1\%$	$\pm 6,89\%$	$\pm 9,25\%$	$\pm 6,53\%$	$\pm 11,12\%$	$\pm 6,56\%$	$\pm 13,5\%$	$\pm 7,48\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1,3})^2 : n^2} : \frac{\Sigma gf_{1,3}}{n}$ gemessen ..	. $\pm 4,66\%$	$\pm 1,99\%$	$\pm 1,81\%$	$\pm 1,28\%$	$\pm 3,22\%$	$\pm 1,89\%$	$\pm 1,1\%$	$\pm 0,50\%$
$\Sigma \Delta gf_{1,3}; \Sigma \Delta gf_{1,3} : \Sigma gf$ .	. + 249 =	+ 6,04%	- 30 =	- 0,26%	- 92 =	- 1,35%	+ 1008 =	+ 2,38%

Tabelle 53.

gf<sub>1/10</sub>

	unter 20 k %		20—25 k %		25—30 k %		30—35 k %	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2$	... 18.241	3.298	11.443	3.820	15.302	7.779	14.214	7.802
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n}$	... 0,00310	0,001315	0,00214	0,00123	0,00219	0,00156	0,00243	0,00180
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n} : \frac{\Sigma \text{gf}_{1/10}}{n}$ gemessen	... $\pm 18,6\%$	$\pm 7,92\%$	$\pm 13,45\%$	$\pm 7,78\%$	$\pm 10,3\%$	$\pm 7,35\%$	$\pm 9,43\%$	$\pm 6,98\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n^2} : \frac{\Sigma \text{gf}_{1/10}}{n}$ gemessen	... $\pm 4,28\%$	$\pm 1,81\%$	$\pm 2,7\%$	$\pm 1,55\%$	$\pm 1,82\%$	$\pm 1,3\%$	$\pm 1,92\%$	$\pm 1,42\%$
$\Sigma \Delta \text{gf}_{1/10}; \Sigma \Delta \text{gf}_{1/10} : \Sigma \text{gf}$	... +448 =	+14,15%	+390 =	+ 9,8%	+486 =	+7,14%	+198 =	+ 3,2%
	35—40 k %		40—50 k %		über 50 k %		Summe	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2$	... 8.593	6.587	18.198	20.522	18.536	15.468	104.527	65.276
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n}$	..... 0,00268	0,00234	0,00265	0,00281	0,00393	0,00359	0,00264	0,00209
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n} : \frac{\Sigma \text{gf}_{1/10}}{n}$ gemessen	... $\pm 7,78\%$	$\pm 6,82\%$	$\pm 6,02\%$	$\pm 6,39\%$	$\pm 6,95\%$	$\pm 6,36\%$	$\pm 9,35\%$	$\pm 7,28\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gf}_{1/10})^2 : n^2} : \frac{\Sigma \text{gf}_{1/10}}{n}$ gemessen ..	.. $\pm 2,25\%$	$\pm 1,96\%$	$\pm 1,18\%$	$\pm 1,25\%$	$\pm 2,01\%$	$\pm 1,83\%$	$\pm 0,76\%$	$\pm 0,49\%$
$\Sigma \Delta \text{gf}_{1/10}; \Sigma \Delta \text{gf}_{1/10} : \Sigma \text{gf}$	... +42 =	+ 1,0 %	-122 =	-1,07%	-144 =	-2,12%	+1298 =	+ 3,06%

Tabelle 54.

 $gf_{1/4}$ 

	unter 20 k%		20—25 k %		25—30 k %		30—35 k %	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2$ .....	5.137	2.839	4.105	2.388	9.681	6.446	4.755	6.295
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n}$ .....	0,00164	0,00122	0,00128	0,00098	0,00174	0,00142	0,00141	0,00161
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n: \frac{\Sigma gf_{1/4}}{n}}$ gemessen ..	$\pm 9,87\%$	$\pm 7,34\%$	$\pm 8,05\%$	$\pm 6,28\%$	$\pm 8,20\%$	$\pm 6,68\%$	$\pm 5,45\%$	$\pm 6,25\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n^2: \frac{\Sigma gf_{1/4}}{n}}$ gemessen ..	$\pm 2,26\%$	$\pm 1,68\%$	$\pm 1,61\%$	$\pm 1,25\%$	$\pm 1,43\%$	$\pm 1,18\%$	$\pm 1,11\%$	$\pm 1,27\%$
$\Sigma \Delta gf_{1/4}; \Sigma \Delta gf_{1/4}; \Sigma gf$ .....	+212=	+6,72%	+121=	+3,05%	+309=	+4,53%	+15=	+0,24%
	35—40 k%		40—50 k%		über 50 k%		Summe	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2$ ...	5.302	4.910	22.921	14.710	6.028	10.321	57.929	47.909
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n}$ ..	0,00210	0,00202	0,00297	0,00238	0,00224	0,00288	0,00196	0,00179
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n: \frac{\Sigma gf_{1/4}}{n}}$ gemessen .....	$\pm 6,10\%$	$\pm 5,88\%$	$\pm 6,44\%$	$\pm 5,40\%$	$\pm 4,03\%$	$\pm 5,09\%$	$\pm 6,93\%$	$\pm 6,32\%$
$\sqrt{\Sigma (\Delta gf_{1/4})^2: n^2: \frac{\Sigma gf_{1/4}}{n}}$ gemessen ..	$\pm 1,76\%$	$\pm 1,71\%$	$\pm 1,26\%$	$\pm 1,06\%$	$\pm 1,17\%$	$\pm 1,47\%$	$\pm 0,55\%$	$\pm 0,52\%$
$\Sigma \Delta gf_{1/4}; \Sigma \Delta gf_{1/4}; \Sigma gf$ ...	+42=	+1,0 %	+108=	+0,94%	-31=	-0,46%	+776=	+1,82%

Tabelle 55.

gfq<sub>1/1</sub>

	unter 20 k%		20—25 k%		25—30 k%		30—35 k%	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2$	.....	2.364	1.857	1.135	2.010	5.285	4.312	5.283
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n}$	.....	0,00111	0,00098	0,00067	0,00099	0,00128	0,00116	0,00148
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n: \frac{\Sigma \text{gfq}_{1/1}}{n}}$ gemessen	.....	± 6,64 %	± 5,94 %	± 4,23 %	± 5,64 %	± 6,05 %	± 5,46 %	± 5,74 %
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n^2: \frac{\Sigma \text{gfq}_{1/1}}{n}}$ gemessen	.....	± 1,52 %	± 1,36 %	± 0,85 %	± 1,13 %	± 1,07 %	± 0,96 %	± 1,17 %
$\Sigma \Delta \text{gfq}_{1/1}; \Sigma \Delta \text{gfq}_{1/1}: \Sigma \text{gf}$	.....	—132 =	—4,20 %	—77 =	—1,94 %	—70 =	—0,97 %	—232 =
	35—40 k%		40—50 k%		über 50 k%		Summe	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2$	.....	5.566	2.139	11.175	5.424	6.070	4.569	36.878
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n}$	.....	0,00215	0,00133	0,00207	0,00144	0,00225	0,00195	0,00157
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n: \frac{\Sigma \text{gfq}_{1/1}}{n}}$ gemessen	.....	± 6,25 %	± 3,87 %	± 4,71 %	± 3,29 %	± 3,98 %	± 3,45 %	± 5,54 %
$\sqrt{\Sigma (\Delta \text{gfq}_{1/1})^2: n^2: \frac{\Sigma \text{gfq}_{1/1}}{n}}$ gemessen	.....	± 1,8 %	± 1,12 %	± 0,92 %	± 0,64 %	± 1,15 %	± 1,00 %	± 0,45 %
$\Sigma \Delta \text{gfq}_{1/1}; \Sigma \Delta \text{gfq}_{1/1}: \Sigma \text{gf}$	.....	+ 40 =	+ 0,97 %	+ 173 =	+ 1,51 %	— 73 =	— 1,08 %	— 371 =

Tabelle 56.

 $gf_{1/2}$ 

	unter 20 k%		20—25 k%		25—30 k%		30—35 k%	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2$ .....	9.311	2.840	3.042	3.401	20.174	5.856	12.460	5.005
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n}$ .....	0,00221	0,00122	0,00110	0,00117	0,00251	0,00135	0,00228	0,00145
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n} \cdot \frac{\Sigma gf_{1/2}}{n}$ gemessen .....	$\pm 13,3\%$	$\pm 7,34\%$	$\pm 6,94\%$	$\pm 7,35\%$	$\pm 11,8\%$	$\pm 6,36\%$	$\pm 8,82\%$	$\pm 5,60\%$
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n^2} \cdot \frac{\Sigma gf_{1/2}}{n}$ gemessen .....	$\pm 3,05\%$	$\pm 2,18\%$	$\pm 1,39\%$	$\pm 1,47\%$	$\pm 2,09\%$	$\pm 1,12\%$	$\pm 1,80\%$	$\pm 1,14\%$
$\Sigma \Delta gf_{1/2}; \Sigma \Delta gf_{1/2}: \Sigma gf$ .....	—272=	—8,62%	—140=	—3,52%	—322=	—4,73%	—371=	—5,98%
	35—40 k%		40—50 k%		über 50 k%		Summe	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
$\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2$ .....	9.358	3.203	13.179	9.016	9.991	5.287	77.515	34.608
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n}$ .....	0,00279	0,00163	0,00225	0,00186	0,00298	0,00203	0,00227	0,00152
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n} \cdot \frac{\Sigma gf_{1/2}}{n}$ gemessen .....	$\pm 8,12\%$	$\pm 4,74\%$	$\pm 5,11\%$	$\pm 4,25\%$	$\pm 5,10\%$	$\pm 3,58\%$	$\pm 8,03\%$	$\pm 5,37\%$
$\sqrt{\Sigma(\Delta gf_{1/2})^2: n^2} \cdot \frac{\Sigma gf_{1/2}}{n}$ gemessen .....	$\pm 2,35\%$	$\pm 1,37\%$	$\pm 1,00\%$	$\pm 0,83\%$	$\pm 1,48\%$	$\pm 1,04\%$	$\pm 0,65\%$	$\pm 0,44\%$
$\Sigma \Delta gf_{1/2}; \Sigma \Delta gf_{1/2}: \Sigma gf$ ...	—49=	—1,19%	+ 9=	+ 0,08%	—195=	—2,88%	—1340=	—3,16%

Der praktischen Durchführung des Vergleiches standen wieder die schon mehrfach erwähnten zwei Schwierigkeiten entgegen: Der Stammfuß und das Kronenprozent. Die Ableitung der Formeln berücksichtigt das Vorhandensein eines Stammfußes nicht. Das muß erst nachträglich durch Einfügen eines Korrekturgliedes geschehen. Als solches wurden prozentuelle Abzüge oder Zuschläge zu den Formzahlen gewählt.

Bei der Brusthöhenformzahl und  $f_{l_{10}}$ , die sich auf Durchmesser beziehen, die noch im Bereich des Stammfußes liegen, wird ein größerer Durchmesser gemessen, als der Berechnung entspricht. Der aus dem gemessenen Durchmesser errechnete gf-Wert muß also verkleinert werden, um vergleichbare Zahlen zu liefern, u. zw umso stärker, je tiefer der Durchmesser am Stamm liegt. Die Versuche ergaben für

$$gf_{l_{10}} \cdot -2\%, \text{ für } gf_{l_3} \quad 18\%.$$

Anderseits wird aber durch den Stammfuß eine tatsächliche Massenvermehrung hervorgerufen, die bei der Fichte im Mittel 2% beträgt. Um dieses Maß müssen die berechneten Werte erhöht werden. Zusammen ergeben sich somit in bezug auf die errechneten Größen folgende Korrekturwerte:

$$gf_{l_3} \cdot -16\%, \quad gf_{l_{10}} \cdot \pm 0\%, \quad gf_{l_4}, \quad gf_{q_{l_4}}, \quad gf_{l_5} \cdot +2\%.$$

Die zweite Schwierigkeit bestand in der richtigen Erfassung des Kronenprozentes. Auf das Nichtübereinstimmen der tatsächlichen Kronengröße mit der windgedrückten wurde schon mehrfach hingewiesen. Nach einigen Versuchen wurde als geeignetster Wert für die in Rechnung zu stellende Kronenlänge die Hälfte der tatsächlichen Länge angenommen.

Die auf Grund dieser Annahme vorgenommenen Berechnungen sind in den nachfolgenden Tabellen 52—56 so zusammengestellt, daß die 150 Versuchsstämme in Klassen gleichen Kronenprozentes eingeteilt wurden. Gemessen und berechnet wurden die absoluten Fehlerwerte  $\Delta gf$ , weil diese, nicht die Prozente, praktisch von Bedeutung sind.

In dieser Fehlertabelle bedeutet: n = Anzahl der Stämme in einer Kronenprozentklasse.

Bei Betrachtung der Fehlertabelle kommen wir zu folgendem Ergebnis:

1. Die algebraische Summe aller Fehler —  $\Sigma \Delta_{\text{gf}}$  — ist nach der Messung größer, als sie nach der Berechnung sein sollte. Dieses Ergebnis war von vorherein zu erwarten, weil der Schaft nicht nur ein Träger gleicher Biegungsfestigkeit, sondern ein Träger gleichen Biegungswiderstandes gegen alle angreifenden Kräfte ist, also auch Knick und Verdrehung, ferner aber ganz besonders deshalb, weil für die geringen Kronenprozente stark unterdrückter Stämme die abgeleiteten Formeln nicht mehr gelten. Infolge der starken Einengung des Standraumes wird nämlich ihre Kronenfläche so stark verringert, daß die Durchmesser in den unteren Stammteilen kleiner sein könnten, als sie schon zu einem früheren Zeitpunkt — als die Krone noch größer war — gewesen sind. Diese Erscheinung zeigt sich bei allen Formzahlarten in abnehmendem Maße bis zu einer Kronenlänge von 30% der Stammhöhe. Der Durchmesserquotient bildet deshalb eine Ausnahme, weil er sich auf 2 Durchmesser stützt.

Zieht man aber nur jene Stämme in Betracht, die eine relative Kronenlänge von über 0,3 h besitzen, dann decken sich die gemessenen Fehler im allgemeinen mit den berechneten. Ein geringeres Kronenprozent als 30 kommt aber praktisch so selten vor, daß die größeren Fehler hiefür nicht ins Gewicht fallen (Guttenberg gibt z. B. in „Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge“, S. 32, das geringste Kronenprozent mit 34% bei den schwachen Stämmen der 2. Standortsklasse an).

2. Für höhere Kronenprozente — über 50% — geben die Formeln etwas zu niedrige Werte, was darauf zurückzuführen ist, daß bei solchen Stämmen die Massenvermehrung des Stammfußes mehr als 2% ausmacht.

3. Die Formel für  $gf_{1/2}$  ergibt durchwegs etwas zu niedrige Werte (etwa 2—3%). Die Ursache konnte noch nicht ermittelt werden.

4. Bei einzelnen Kronenprozentklassen überschreitet die Summe der  $\Delta_{\text{gf}}$  stark den berechneten Wert. Die Ursache liegt hier durchwegs in einzelnen Stämmen, deren große Abweichungen infolge der zu geringen Beschickung der einzelnen Klassen mit Vergleichsstämmen nicht kompensiert werden konnten.

5. Die Summe der Fehlerquadrate stimmt ebenfalls annähernd mit den berechneten Werten überein. Kleinere Abweichungen sind auf dieselben Ursachen zurückzuführen wie bei der Summe der Fehler; größere Unterschiede — bei der Brusthöhenformzahl und  $f_{1/10}$  — darauf, daß die Durchmesser schon im Bereich des Stammfußes liegen.

6. Für die praktische Anwendung der angegebenen Tabellen lassen sich folgende Regeln ableiten:

- a) Um die Masse einer Summe von Stämmen mit einer bestimmten Genauigkeit zu ermitteln, ist die mit Hilfe der Fehlerprozente berechnete Stammzahl zu vermehren, u. zw.:

$gf_{1,3}$	um 200%
$gf_{1,10}$	um 20%
$gf_{1,4}$	um 10%
$gf_{q_1/1}$	um 50%

- b) Um eine Genauigkeit von  $\pm 1\%$  zu erreichen, dürfte für die einzelnen Formzahlarten im Durchschnitt die Messung folgender Stammzahlen erforderlich sein:

$gf_{1,3}$	. 150
$gf_{1,10}$	60
$gf_{1,4}$	50
$gf_{q_1/1}$	40

- c) Infolge Nichtberücksichtigung verschiedener Einflüsse auf die Stammform darf die ausgleichende Wirkung der Messung einer größeren Anzahl von Stämmen nicht überschätzt werden. Sie reicht etwa bis  $\frac{\Delta gf}{gf} = \pm 1\%$ , beim Durchmesserquotienten bis etwa  $\pm 0,5\%$ .

- d) Die Brusthöhenformzahl und  $f_{1,10}$  sollen nur bei  $k\% > 30$  verwendet werden.

### 3. Massenermittlung von Beständen.

Die ganze bisherige Betrachtungsweise war auf dem Grundgedanken aufgebaut, daß sich die Bestandesmasse aus dem Produkt von Masse des Mittelstamms mal Stammzahl aufbaut. Der Bestand ist jedoch keine Summe von Einzelstämmen, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Sie alle stehen vielmehr miteinander im schärfsten Wettbewerb um den Standraum, in dem diejenigen Stämme als Sieger hervorgehen, denen es gelingt, mit dem geringstmöglichen Aufwand an Assimilaten die Krone über die der Nachbarstämme zu erheben.

Diese Konkurrenz verbindet die Glieder des Bestandes zu einer Einheit höherer Ordnung, deren Lebenslauf eigenen Gesetzen unterliegt. Sie bestehen darin, daß der vorhandene Wuchsraum, unabhängig von der Zahl der Stämme, möglichst vollständig ausgenützt wird.

In diesem Sinne sollen Betrachtungen über den Bestand angestellt und versucht werden, ob sich nicht das Wachstum von Beständen auf andere Weise als durch Summierung des Wachstums der Einzelstämmme ermitteln läßt.

Aus der Art der Verbindung der einzelnen Stämme zum Bestand geht hervor, daß es sich bei diesem Lebensgesetz noch viel weniger als bei Wachstumsgesetzen des Einzelstammes um Erscheinungen handeln kann, die mit der Sicherheit physikalischer Vorgänge eintreten. Daran sind einerseits Unterschiede im Standort und in den Erbanlagen, anderseits die verhältnismäßig geringe Zahl von Stämmen schuld, die ein Bestand umfaßt. Diese Unterschiede lassen sich zwar in einer Ertragstafel ausgleichen — und verleihen ihr damit eine größere Reichweite — aber sie verringern die Genauigkeit im Einzelfall. Und gerade darauf kommt es an.

Wenn wir also das Lebensgesetz des Bestandes zur Berechnung von Bestandeszuwachs und -masse verwenden wollen, müssen wir uns von Haus aus darüber klar sein, daß wir das mit einer Einbuße von Genauigkeit bezahlen werden. Dieser Nachteil kann jedoch durch eine gesteigerte Anschmiegksamkeit des Verfahrens an die örtlichen Verhältnisse wieder wettgemacht werden.

#### d) Ableitung der Formeln.

Entsprechend ihrer Doppelfunktion wirkt sich auch die Kronenmasse des Bestandes in physiologischer Beziehung auf den Bestandeszuwachs und in statischer auf die Bestandesmasse aus.

##### Ermittlung des Bestandeszuwachses.

Der Massenzuwachs  $M'$  des Bestandes ist  $M' = c$  mal Kronenmasse mal ( $b-h$ ). Der einzige aussichtsreiche Weg, die physiologisch wirksame Kronenmasse zu ermitteln, besteht meiner Ansicht nach in der Messung des Lichtgenusses. Bei dieser Methode wird automatisch ein Mittelwert für den Bestand gemessen, so daß die Aussicht günstig ist, mit ihr praktisch verwendbare Ergebnisse zu erzielen.

##### Ermittlung der Bestandesmasse.

Die über den Bestand streichende, windbewegte Luft erfährt an seiner vielfach gezahnten Oberfläche einen Widerstand, durch den sie abgebremst wird. Der auf diese Weise entstehende Winddruck hängt einerseits von der Windgeschwindigkeit  $W$ , anderseits von der Rauigkeit  $c$  der Bestandsoberfläche ab, wenn wir unsere Betrachtungen von vornherein auf die Flächeneinheit (1 ha) beschränken.

Schränken wir den Kreis der Betrachtungen überdies noch auf Bestände ein, in denen dieselben Windgeschwindigkeiten vorkommen, dann hängt der vom Bestand aufzunehmende Winddruck  $P$  nur von der Rauigkeit der Bestandesoberfläche ab.  $P = c \cdot W$

Dieser Rauigkeitsbeiwert  $c$  dürfte aber nicht für alle Bestände gleich groß sein. Vielmehr werden gleichaltrige, dichte Bestände eine weniger rauhe Oberfläche — und somit einen kleineren Rauigkeitsbeiwert — besitzen als ungleichaltrige und lockere. Da sich Standraum und Erziehungsart hauptsächlich in der Kronenlänge ausdrücken, ist die Annahme gerechtfertigt, daß der Rauigkeitsbeiwert eine Funktion der Kronenlänge sei.

Welcher Art diese Funktion sei, kann etwa durch folgende Überlegung abgeschätzt werden: Beim Darüberstreichen des Windes über die Baumkronen bilden sich Wirbel, die umso stärker werden und daher umso höher über die Gipfelzone hinaufreichen, je lockerer der Bestand ist. Als Extrem kann wohl die Annahme gelten, daß die Wirbel proportional mit der Kronenlänge auch nach oben zunehmen. Wahrscheinlich ist jedoch, daß die Zunahme in etwas gedämpfter Form, also bei Parabelform der Abhängigkeit mit einem Exponenten zwischen Null und +1 erfolgt. Um zu zahlenmäßigen Ergebnissen zu gelangen, soll die Abhängigkeit des Rauigkeitsbeiwertes mit  $c = c_1 \sqrt[k]{k}$  angenommen werden. Hieraus ergibt sich der vom Bestand aufzunehmende Winddruck  $P = cW = c_1 W \sqrt[k]{k}$ . Da  $W$  konstant sein soll, kann  $c_1 W$  zu einer neuen Konstanten  $c_2$  zusammengefaßt werden.  $P = c_2 \sqrt[k]{k}$ .

Die Summe der Massen aller Stammträger (=Bestandesmasse) hängt nun davon ab, auf wieviele Träger der Druck verteilt wird und wie hoch sich der Angriffspunkt dieses Druckes, die Krone, über dem Boden befindet.

Zur Vereinfachung der Berechnung soll nur das massenmäßig weitaus überwiegende Paraboloid des astfreien Schafteiles betrachtet werden. Sein Durchmesser  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot h}{\pi k_b}}$ . Verteilt sich der Druck auf  $S$  Stämme, dann wird der Durchmesser jedes von diesen  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot h}{\pi k_b \cdot S}}$ . Setzt man nun für  $P$  den oben errechneten Wert

$$P = c_2 \sqrt[k]{k}, \text{ dann erhält man } d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot c_2 \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot h}{\pi k_b \cdot S}}$$

zu einer einzigen Konstanten  $c_3$  zusammenfassen kann, erhält man

$$d = c_3 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2} h}{S}}.$$

In dieser Formel ist nur eine Konstante  $c_3$ , dafür aber drei unabhängige Veränderliche  $k$ ,  $h$ ,  $S$  vorhanden. Kennt man nun in einem konkreten Bestand sowohl  $d$  als auch  $k$ ,  $h$  und  $S$ , dann kann man hieraus  $c_3$  berechnen und mit seiner Hilfe voraussagen, wie sich  $d$  bei geänderter Erziehung, also anderem  $k$ ,  $h$  und  $S$  verhalten wird.

Es kann noch ein Schritt weiter gegangen und berechnet werden, wie sich die Bestandesmasse ändern wird. Die Masse des Mittel-

$$\text{stammes } m = f \cdot g \cdot h. \text{ Setzt man für } g = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{c_3^2 \pi}{4} \left( \frac{\frac{1}{2} h}{S} \right)^{\frac{2}{3}}$$

dann wird  $m = \frac{c_3^2 \pi}{4} \cdot f \cdot k^{\frac{1}{3}} h^{\frac{5}{3}} S^{-\frac{2}{3}}$ . Die Bestandesmasse  $M = mS = \frac{c_3^2 \pi}{4} \cdot f \cdot k^{\frac{1}{3}} h^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{3}}$

Ändert sich nun  $k$ ,  $h$  und  $S$ , dann kann zunächst auf Grund des geänderten Kronenprozentes die neue Formzahl und mit ihrer Hilfe auch die den geänderten Verhältnissen entsprechende Bestandesmasse errechnet werden.

Hiezu einige willkürlich herausgegriffene Vergleiche mit Ertragstafeln:

1. Guttenberg, 1. Standortsklasse, 70 Jahre:

Stammzahl  $S_{70} = 792$ , Höhe  $h_{70} = 26,0$ , Formzahl  $f_{70} = 0,477$ , Durchmesser  $d_{70} = 30,4$ , Kronenlänge  $k_{70} = 13$  m (nach Guttenberg S. 31). Dieser Bestand soll auf den Ertragstafelstand von 80 Jahren durchforstet werden. Hiefür ist  $S_{80} = 693$ ,  $h_{80} = 28,7$ ,  $f_{80} = 0,475$ ,  $d_{80} = 33,3$ ,  $k_{80} = 14$  m.

Die Berechnung ergibt:  $d_{70} = 30,4 = c_3 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2} \cdot 26}{792}}$ . Hieraus

$$c_3 = 62,0, d_{80} = 62,0 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2} \cdot 28,7}{693}} = 33,3,$$

$$M_{80} = \frac{62,0^2 \pi}{4} \cdot 0,475 \cdot 14^{\frac{1}{3}} \cdot 28,7^{\frac{5}{3}} \cdot 693^{\frac{1}{3}} = 823.$$

Beide Werte decken sich mit den Angaben der Ertragstafel.

2. Guttenberg, 5. Standortsklasse, 40 Jahre:

$$\begin{aligned} S_{40} &= 3250, h_{40} = 4,4, f_{40} = 0,624, d_{40} = 7,4, k_{40} = 4 \text{ (geschätzt)}, \\ S_{50} &= 2280, h_{50} = 6,1, f_{50} = 0,540, d_{50} = 10,4, k_{50} = 5,5 \text{ (geschätzt)}, \\ M_{50} &= 66, c_3 = 53,1, d_{50} = 9,8 M_{50} = 56,7 (-14\%). \end{aligned}$$

Die beiden Vergleiche geben ein befriedigendes Resultat und rechtfertigen den Versuch, die beiden Formeln im Hinblick auf ihre praktische Verwertbarkeit zu untersuchen.

### b) Auswertung der Formeln.

Wie schon bemerkt wurde, eignen sich die beiden Formeln infolge ihres Aufbaues (eine Konstante, drei unabhängige Veränderliche) besonders dazu, die weitere Entwicklung durchforsteter Bestände vorauszusagen. Hiebei ergeben sich aber zwei Schwierigkeiten, die den Wert der Formeln bedeutend verringern: erstens können wohl Angaben über den Mittelstamm und die Bestandesmasse gemacht werden, aber keine über die Zeit, die erforderlich ist, bis der berechnete Zustand eintritt. Und zweitens verlangt die Formel nicht nur die Kenntnis der Stammzahl des durchforsteten Bestandes, sondern auch die der Höhe und Kronenlänge in jenem Zeitpunkt, für den der Mittelstammdurchmesser und die Bestandesmasse ermittelt werden soll:

Angaben über die Zeit — somit über den laufenden Massenzuwachs — lassen sich noch am ehesten durch Messung des Lichtgenusses machen. Ohne diese sind nur ziemlich allgemeine Angaben auf Grund folgender Überlegung möglich: Der verbleibende Bestand hatte vor der Durchforstung ein Zuwachsprozent  $p\%$ . Durch Entnahme des Nebenbestandes gelangte er auch so ziemlich in den Lichtgenuss des Nebenbestandes, muß aber auch dessen Winddruck über-

nehmen. An Hand der Formel  $d = c_3 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{k^2} \cdot h}{S}}$  lässt sich berechnen,

welche Stärke der Mittelstamm erhalten muß, damit er dem neuen Winddruck gewachsen ist. Bis dahin kann keine Vergrößerung der Krone stattfinden, also auch kein besonderer Höhenzuwachs. Die Zeit, die bis zur Erreichung jenes Zustandes verstreichen wird, lässt sich mit Hilfe des Zuwachsprozentes  $p\%$  abschätzen. Dieses wird infolge des erhöhten Lichtgenusses nach der Durchforstung wahrscheinlich zu-, keinesfalls jedoch abnehmen. Rechnet man also mit  $p\%$  weiter, dann kann man eine obere Grenze angeben, die keinesfalls überschritten wird. Erst von diesem Zeitpunkt an erfolgt dann eine Ausbreitung der Krone und mithin auch ein Höhenzuwachs.

Es wäre wahrscheinlich möglich, die zeitliche Weiterentwicklung des Mittelstammes schrittweise aufzubauen, doch birgt diese Methode soviele Fehlerquellen in sich, daß zunächst davon abgesehen werden soll.

Der zweite Mangel der Formel, die Unkenntnis der Höhe und der Kronenlänge, wiegt nicht so schwer, denn die Höhe reagiert ja nur in geringem Maße auf die Durchforstung. Die Kronenlänge kommt in den Formeln aber nur in der Quadrat- bzw. dritten Wurzel vor, sodaß sich Fehler in der Schätzung wenig bemerkbar machen.

Hieran anschließend soll überhaupt einiges über die Genauigkeit der Formel gesagt werden.

Die Stammzahl ist im Einzelfall eine sehr unsichere Angelegenheit. In dieser Formel verliert sie aber diese Eigenschaft, weil die Konstante  $c_3$  mit Hilfe der tatsächlichen Stammzahlen berechnet wurde. Dasselbe gilt für die Stammzahlen des durchforsteten Bestandes. Zudem handelt es sich bei den Stammzahlen nur um die des windgedrückten herrschenden Bestandes, die an sich schon eine größere Stabilität aufweisen. Und schließlich kommt die Stammzahl in der dritten Wurzel vor, wodurch Fehler weitgehend unwirksam gemacht werden.

Die Höhe übt auf die Bestandesmasse mit dem Exponenten  $\frac{5}{3}$  einen bedeutenden Einfluß aus. Da aber der Einfluß von Durchforstungsmaßnahmen auf die Höhe gering ist, läßt sich diese immer mit ziemlicher Sicherheit voraussagen. So weichen z. B. die Höhe in Wiedemanns Fichtenertragstafel für den dichten und lockeren Schuß nur um 1 m ab.

Man kann daher im großen und ganzen sagen, daß die Fehlerfortpflanzung in den beiden Formeln günstig ist, und daß ihre praktische Anwendung Erfolg verspricht.

Abschließend soll ein Versuch mit extremen Werten gemacht werden: Wiedemanns Ertragstafelbestand der Fichte, I. Standortsklasse, Dichteschluß, 70jährig, soll auf die Stammzahl des 120jährigen Bestandes im lockeren Schluß durchforstet und ihre Entwicklung berechnet werden.

$$S_{70} = 787, h_{70} = 27,4, f_{70} = 0,502, d_{70} = 26,9, k_{70} = 13 \text{ (geschätzt)}$$

$$d$$

$$M_{70} = 615, c_3 = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{k^2} \cdot h}{S}} = 53,7. \text{ Laufend jährlicher Zuwachs an}$$

Derbholz  $M' = 14,6 \text{ fm}$ , entspricht  $2,5\%$ . Nach der Durchforstung beträgt die Stammzahl  $S_{120} = 203$ .

Bis zur Anpassung an den neuen Winddruck bleiben Höhe und Krone gleich. Dem entspricht  $d'_{120} = 53,7 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{k_{70}^2} \cdot h_{70}}{S_{120}}} = 42,3$  und  $M'_{120} = \frac{53,7^2 \pi}{4} f_{70} k_{70}^{1/3} h_{70}^{5/3} S_{120}^{1/3} = 473$ . Unmittelbar nach der Durchforstung betrug die Derbholzmasse etwa: 615 — ausscheidender Bestand laut Ertragstafel (85 Stämme mit 35 fm) — 499 Mittelstämme  $\left(499 \times \frac{615}{787}\right) = 189$  fm. Wenn angenommen wird, daß das ursprüngliche Zuwachsprozent von 2,5% durch verbesserten Lichtgenuss auf 3,5% steigt, werden 43 Jahre benötigt, bis der Stamm dem Winddruck standhält und bis sich die Krone entsprechend vergrößern kann. In diesem Zeitpunkt ist der Bestand  $70 + 43 = 113$  Jahre alt.

Nun gelten für den Ertragstafelbestand im Alter von 120 Jahren folgende Daten:  $S_{120} = 203$ ,  $h_{120} = 36,9$ ,  $d_{120} = 49,8$ ,  $f_{120} = 0,442$ ,  $M_{120} = 644$ ,  $k_{120} = 16$  und Zuwachsprozent  $M'\% = 1,3$ . Für unseren sich weiter entwickelnden Bestand würde sich der Mittelstammdurchmesser

$$d_{120} = 53,7 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{16^2} \cdot 36,9}{203}} = 48,3 \text{ und eine Derbholzmasse } M'_{120} = 603 \text{ fm}$$

gegenüber 644 fm der Ertragstafel ( $-6\%$ ) errechnen.

Auch der Zeitpunkt, bis zu den dieser Zustand erreicht werden wird, läßt sich abschätzen, wenn man annimmt, daß sich der Zuwachs allmählich von 6,6 fm (= 3,5% von 189 fm) auf 8,0 fm (1,3% von 644 fm) ansteigt. Das entspräche einem mittleren Zuwachs von 7,3 fm. Um die Bestandesmasse von 473 fm, die er im Alter von 113 Jahren besitzt, auf die errechneten 603 fm zu steigern, wären somit 18 Jahre notwendig; sodaß der Bestand zu diesem Zeitpunkt ein Gesamtalter von 131 (rund 130) Jahren hätte.

Dieses absichtlich mit extremen Werten durchgerechnete Beispiel zeigt eben deshalb die Schwächen des Verfahrens hinsichtlich der Zeitangabe besonders deutlich. Unter Verhältnissen, die in der Praxis tatsächlich vorkommen, dürfte es aber auch in dieser Form schon brauchbare Ergebnisse erzielen.

Der weiteren Auswertung der beiden Formeln und der ihnen zugrunde liegenden Gedankengänge dürfte die Konstruktion des Bestandesmittelstammes erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Nach meiner Ansicht ist die Behandlung von Fragen der Bestandeserziehung, bei der es doch auf die Differenzierung innerhalb des Bestandes

ankommt, grundsätzlich unvereinbar mit der Aufstellung eines einzigen Repräsentanten für den Bestand. Wenn man sich nicht von vornherein an eine bestimmte Aufteilung zwischen Haupt- und Nebenbestand binden will — wofür dann 2 Modellstämme genügen — muß man entweder für jede Stammklasse einen solchen Stamm ermitteln oder die ganzen Verhältnisse durch Kurven oder Gleichungen darstellen. Welche Lösung auch immer gefunden werden mag; jedenfalls bahnt sich hier ein Weg an, auf dem a priori über die Auswirkung von Durchforstungen geurteilt werden kann.

### c) Beziehungen zwischen der Höhe, der Bestandesmasse und Grundfläche.

Die Formeln  $d = c_3 \sqrt[3]{\frac{k^{\frac{1}{2}} \cdot h}{S}}$  und  $M = \frac{c_3^2 \pi}{4} k^{\frac{1}{3}} h^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{3}}$  lassen sich

unter der Annahme eines stetig sich ändernden Standraumes, wie dies dem Wachstumsgang von Ertragstafeln zugrunde gelegt ist, weiter entwickeln und vereinfachen.

Unter solchen Verhältnissen wird sowohl die Kronenlänge als auch die Stammzahl eine Funktion der mittleren Bestandeshöhe sein. Wenn es sich hiebei um eine parabolische Funktion der Form  $y = ax^n$  handelt, dann wird sowohl die Bestandesgrundfläche als auch die Masse die gleiche Form besitzen, denn dann ist  $k = a_k h^{n_k}$ ,  $S = a_s h^{n_s}$ ,

$$d = c_3 k^{\frac{1}{6}} \cdot h^{\frac{1}{3}} S^{-\frac{1}{3}} = c_3 a_k a_s h^{\frac{n_k}{6} + \frac{1}{3} - \frac{n_s}{3}} = ah^n. \text{ Die Bestandesgrundfläche } G = \frac{d^2 \pi}{4} = S = a_g h^{\frac{n_k}{3} + \frac{2}{3} + \frac{n_s}{3}} = a_g h^{n_g}. \text{ Falls sie auf den Durchmesser in Brusthöhe bezogen wird: } G = a_g (h-1,3)^{n_g}. \text{ Und }$$

$$M = G h f - a_m h^{\frac{n_k}{3} + \frac{5}{3} + \frac{n_s}{3} + n_f} = a_m h^{n_m}.$$

Die Fehlerfortpflanzung liegt sowohl für die Bestandesgrundfläche als auch für die Masse sehr günstig, weil der Potenzexponent der Kronenlänge nur mit  $\frac{1}{6}$ , der der Stammzahl nur mit  $\frac{1}{3}$  in Anrechnung kommt.

Leider fehlen in Guttenbergs Ertragstafeln genauere Angaben über die Kronenlänge, sodaß auf einen unmittelbaren Vergleich verzichtet werden muß. Dagegen ist die Überprüfung der Gleichung  $S = a_s h^{n_s}$  für die Stammzahlen möglich. Sie ergibt für die erste Standortsklasse von Guttenbergs Fichte im Hochgebirge folgendes Bild:

**Tabelle 57.**

h	1,4	5,3	10,0	14,7	19,0	22,8
S Ertragstafel . . .		4800	2400	1550	1160	932
S berechnet . . .	33,500	5900	2640	1613	1160	915
Δ% . . .	—	+ 18,6	+ 9,1	+ 3,9	0	— 1,9
h	26,0	28,7	31,0	32,9	34,5	35,8
S Ertragstafel . . .	792	693	620	563	518	480
S berechnet . . .	776	683	620	573	539	516
Δ% . . .	— 2,1	— 1,5	0	+ 1,7	+ 3,5	+ 7,0

$S = 50.272 \cdot h^{-1,280}$  Die Konstanten wurden aus den Ertragstafelwerten für 19,0 und 31,0 Höhe berechnet. Für die 2. bis 5. Standortsklasse errechnen sich die Potenzexponenten  $n_s$  in gleicher Weise mit —1,22, —1,25, —1,19, —1,04.

Die Übereinstimmung der berechneten mit den Ertragstafelwerten ist soweit befriedigend, daß der Potenzexponent  $n_g$  für die Bestandesgrundfläche berechnet werden kann. Hierbei wurde mangels entsprechender Unterlagen der Potenzexponent der Kronenfunktion  $n_k$  mit 0,5 geschätzt.

$$n_g = \frac{n_k}{3} + \frac{2}{3} + \frac{n_s}{3} \text{ ergibt für die 5 Standortsklassen folgende}$$

**Tabelle 58.**

Werte	I	II	III	IV	V
Theorie . . .	0,41	0,43	0,42	0,44	0,49
Berechnung nach Ertragstafel . .	0,47	0,51	0,59	0,61	0,66
Differenz . .	— 0,06	— 0,08	— 0,17	— 0,17	— 0,17

Über das Ergebnis der Vergleichsberechnungen für die einzelnen Höhen der Ertragstafeln geben die nachstehenden Tabellen Auskunft. Das Ergebnis ist jedenfalls im allgemeinen sehr befriedigend, nur kann die Kurve infolge ihres einfachen Baues der stärkeren Lichtstellung der Bestände im höheren Alter nicht folgen.

Der Potenzexponent  $n_m$  der Bestandesmassenkurve errechnet sich aus  $n_m = \frac{n_k}{3} + \frac{5}{3} + \frac{n_s}{3} + n_f$ . Für  $n_k$  gilt die vorhin gemachte Annahme  $n_k = 0,5$ , während der Wert  $n_f$  nur wenig über Null liegt und daher für alle Standortsklassen mit  $+0,1$  in Rechnung gestellt werden soll. Da  $n_m = n_g + 1 + n_f$ , ergibt sich  $n_m = n_g + 1,1$ . In der folgenden Tabelle sind diese Werte den aus den Ertragstafeln berechneten gegenüber gestellt. Sie ergeben ein überraschend günstiges Resultat, das sich auch bei den Vergleichsberechnungen mit Ertragstafeln verschiedener Herkunft und Holzarten wiederholt.

Tabelle 59.

Standortsklasse	I	II	III	IV	V
Theorie . . .	1,51	1,53	1,52	1,54	1,59
Ertragstafel . . .	1,46	1,50	1,58	1,62	1,60
Differenz . . .	+ 0,05	+ 0,03	- 0,06	- 0,08	- 0,01

Tabelle 60.

## 1. Standortsklasse.

h	1,4	5,3	10,0	14,7	19,0	22,8	26,0	28,7	31,0	34,5	37,0	39,1
G gem	—	24,0	35,0	43,1	49,2	53,9	57,5	60,4	62,7	66,0	68,2	69,7
G ber	—	24,6	35,3	43,1	49,2	53,9	57,5	60,4	62,7	66,0	68,2	69,8
4%	—	+ 2,4	+ 0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,1
M gem	14	71	175	308	449	587	713	823	919	1068	1171	1244
M ber	10	70	175	308	449	587	713	823	919	1075	1196	1287
4%	—40	— 1,4	0	0	0	0	0	0	0	+0,7	+2,1	+ 3,3
$h_1 = 19,0$	$h_2 = 28,7$	$g_1 = 49,2$	$n_{g_2} = 60,4$	$a_g = 12,881$	$ng = 0,46637$							
$h_1 = 19,0$	$h_2 = 31,0$	$M_1 = 449$	$M_2 = 919$	$a_m = 6,0437$	$n_m = 1,4631$							

## 2. Standortsklasse.

h	1,1	4,1	7,8	11,6	15,3	18,6	21,5	24,0	26,1	29,4	31,9	34,0
G gem	—	18,0	28,1	36,0	42,4	47,4	51,3	54,3	56,6	59,8	62,0	63,5
G ber	—	18,8	28,7	36,3	42,4	47,2	50,9	54,1	56,6	60,2	62,8	64,9
4%	—	+ 4,3	+ 2,1	+ 0,8	0	—0,4	—0,8	—0,4	0	+0,7	+ 1,3	+ 2,2
M gem	11	46	113	209	320	433	539	633	713	836	924	986
M ber	6	44	115	210	320	428	532	631	713	845	949	1052
4%	—	— 4,6	+ 1,7	+ 0,5	0	—1,2	—1,3	—0,5	0	+ 1,1	+ 2,6	+ 6,3
$h_1 = 15,3$	$g_1 = 42,4$	$M_1 = 320$	$a_g = 11,16$	$a_m = 5,33$								
$h_2 = 26,1$	$g_2 = 56,6$	$M_2 = 713$	$ng = 0,505$	$n_m = 1,499$								

### 3. Standortsklasse.

h	0,9	3,2	6,1	9,2	12,3	15,0	17,4	19,5	21,3	24,3	26,8	28,9
G gem	—	11,8	21,7	29,2	35,2	40,2	44,2	47,4	50,0	53,6	55,8	57,2
G ber	—	12,5	21,6	29,0	35,2	40,2	44,2	47,4	50,0	54,3	57,4	60,4
Δ%	—	+ 5,6	-0,5	-0,7	0	0	0	0	0	+1,3	+2,8	+ 5,3
M gem	8	32	74	139	218	300	380	454	519	626	705	760
M ber	4	26	72	137	218	299	378	454	519	634	749	841
Δ%	—	-18,7	-2,7	-1,5	0	-0,3	-0,5	0	0	+1,3	+ 6,3	+10,5

$$\begin{array}{llllll} h_1 = 12,3 & g_1 = 35,2 & M_1 = 218 & ag = 8,58 & am = 4,18 \\ h_2 = 21,3 & g_2 = 50,0 & M_2 = 519 & ng = 0,588 & nm = 1,567 \end{array}$$

### 4. Standortsklasse.

h	0,7	2,4	4,5	6,8	9,1	11,2	13,2	14,9	16,5	19,4	21,9	24,0
G gem	—	6,0	15,5	23,0	29,0	33,8	37,8	41,4	43,7	47,2	49,3	50,6
G ber	—	8,7	16,8	23,4	29,0	33,8	37,8	40,9	43,7	48,7	52,7	55,9
Δ%	—	+ 45	+ 8,4	+ 1,7	0	-0,6	0	-1,2	0	+ 3,2	+ 6,9	+ 10,4
M gem	4	18	44	84	135	191	248	303	354	443	514	566
M ber	2	16	43	84	135	190	248	301	354	460	561	650
Δ%	—	-11,1	-2,3	0	0	-0,5	0	-0,7	0	+ 3,8	+ 9,1	+ 14,8

$$\begin{array}{llllll} h_1 = 9,1 & g_1 = 29,0 & M_1 = 135 & ng = 0,615 & nm = 1,617 \\ h_2 = 16,5 & g_2 = 43,7 & M_2 = 354 & ag = 8,20 & am = 3,81 \end{array}$$

### 5. Standortsklasse.

h	1,3	2,8	4,4	6,1	7,7	9,2	10,6	11,9	13,1	14,2	16,1	17,7
G gem	—	7,6	14,0	19,4	24,0	27,8	31,0	33,7	35,9	37,7	40,5	42,6
G ber	—	7,3	14,8	19,8	24,0	27,6	30,7	33,7	35,9	38,0	41,5	44,7
Δ%	—	-4,0	+ 5,7	+ 2,1	0	-0,7	-0,9	0	0	+ 0,8	+ 2,5	+ 4,9
M gem	7	20	40	66	96	128	161	194	225	254	305	347
M ber	6	19	39	66	96	128	161	194	225	256	313	367
Δ%	—	-14,3	-5,0	-2,5	0	0	0	0	0	+ 0,8	+ 2,6	+ 5,8

$$\begin{array}{llllll} h_1 = 7,7 & g_1 = 24,0 & M_1 = 96 & ng = 0,659 & nm = 1,603 \\ h_2 = 13,1 & g_2 = 35,9 & M_2 = 225 & ag = 7,04 & am = 3,64 \end{array}$$

**Tabelle 61.**  
**Weißtanne.**  
(Eichhorn, 1902, Gesamtmasse.)

1. Standortsklasse.

h	2,5	4,5	6,7	13,3	18,9	22,9	26,0	28,4	30,4	31,8	33,0	34,0
M gem	46	78	127	325	542	710	842	946	1030	1100	1158	1210
M ber	35	78	133	336	542	703	837	940	1030	1100	1156	1206
Δ %	-24	0	+4,7	+3,7	0	-1,0	-0,6	-0,6	0	0	-0,2	-0,3

$$\begin{aligned} h_1 &= 18,9 & M_1 &= 542 & n_m &= 1,350 \\ h_2 &= 30,4 & M_2 &= 1030 & a_m &= 10,25 \end{aligned}$$

3. Standortsklasse.

h	1,4	2,4	3,8	8,0	12,3	15,7	18,3	20,4	22,2	23,5	24,6	25,5
M gem	22	40	69	171	298	410	505	588	659	720	772	816
M ber	15	32	60	165	298	415	508	594	663	720	767	806
Δ %	-31,7	-20	-13	-3,5	0	+1,2	+0,6	+1,0	+0,6	0	-0,6	-7,2

$$\begin{aligned} h_1 &= 12,3 & M_1 &= 298 & n_m &= 1,361 \\ h_2 &= 23,5 & M_2 &= 720 & a_m &= 9,75 \end{aligned}$$

5. Standortsklasse.

h	0,3	1,1	2,9	4,1	5,4	8,1	10,6	12,5	14,0	15,2	16,2	17,2
M gem	3	20	55	80	108	172	242	306	356	400	440	477
M ber	2	19	43	69	100	172	245	307	357	400	437	475
Δ %	—	-5	-21,8	-13,8	-7,4	0	+1,2	+0,3	+0,3	0	-0,7	-0,4

$$\begin{aligned} h_1 &= 8,1 & M_1 &= 172 & n_m &= 1,340 \\ h_2 &= 15,2 & M_2 &= 400 & a_m &= 10,40 \end{aligned}$$

Tabelle 62.

**Weißkiefer.**  
(Lichtungsbetrieb, Wimmenauer, 1908.)

1. Standortsklasse.

h	9,9	14,7	18,7	21,9	24,6	26,9	28,8	30,3	31,6	32,7	33,7	35,2
M gem	182	238	276	309	338	363	384	402	418	432	444	465
M ber	162	223	272	309	340	366	386	403	418	430	442	457
Δ %	-11	—	6,3	-1,4	0	+0,6	+0,8	+0,5	+0,2	0	-0,5	-0,5

$$\begin{aligned} h_1 &= 21,9 & M_1 &= 309 & n_m &= 0,824 \\ h_2 &= 31,6 & M_2 &= 418 & a_m &= 24,29 \end{aligned}$$

## 2. Standortsklasse.

h	7,9	12,2	15,7	18,6	21,0	23,0	24,7	26,2	27,5	28,6	29,5	30,8
M gem	138	212	250	279	302	323	342	359	374	387	399	420
M ber	147	205	246	279	305	327	344	360	374	384	395	408
Δ%	+ 6,5	- 3,3	- 1,6	0	+ 1,0	+ 1,2	+ 0,6	+ 0,3	0	- 0,8	- 1,0	- 2,9

$h_1 = 18,6$        $M_1 = 279$        $n_m = 0,74945$   
 $h_2 = 27,5$        $M_2 = 374$        $a_m = 31,22$

## 3. Standortsklasse.

h	5,6	9,6	12,5	14,7	16,6	18,3	19,9	21,4	22,8	24,0	25,0	26,5
M gem	98	163	212	238	260	280	298	314	328	341	353	374
M ber	118	174	212	238	260	280	296	313	328	339	349	366
Δ%	+ 20,4	+ 6,8	0	0	0	0	- 0,7	0	0	- 0,6	- 1,1	- 2,1

$h_1 = 14,7$        $M_1 = 238$        $n_m = 0,72552$   
 $h_2 = 22,8$        $M_2 = 328$        $a_m = 33,86$

**Tabelle 63.**

### Rotbuche.

(Grundner.)

## 1. Standortsklasse.

h	10,6	14,9	18,9	22,3	25,2	27,7	30,0	32,0	33,8	35,2	36,2	36,8
M gem	130	220	310	395	478	549	613	670	718	760	795	825
M ber	133	218	311	395	471	543	613	670	725	766	801	822
Δ%	+ 2,3	- 0,9	+ 0,3	0	- 1,5	- 1,1	0	0	+ 1,0	+ 0,8	+ 0,8	- 0,4

$h_1 = 22,3$        $M_1 = 395$        $n_m = 1,462$   
 $h_2 = 32,0$        $M_2 = 670$        $a_m = 4,21$

## 3. Standortsklasse.

h	7,7	11,0	14,2	16,9	19,2	21,3	23,2	25,0	26,6	27,8	28,7	29,1
M gem	90	161	229	294	357	417	470	515	553	585	610	630
M ber	97	161	230	294	358	405	457	510	553	586	615	631
Δ%	+ 7,8	0	+ 0,4	0	+ 0,3	- 2,9	- 2,8	- 1,0	0	+ 0,2	+ 0,8	+ 0,2

$h_1 = 16,9$        $M_1 = 294$        $n_m = 1,393$   
 $h_2 = 26,6$        $M_2 = 553$        $a_m = 5,70$

## 5. Standortsklasse.

h	4,8	7,1	9,3	11,3	13,1	14,8	16,4	18,0	19,4	20,5	21,3	21,6
M gem	—	91	134	172	207	239	268	294	317	337	352	360
M ber	65	101	137	172	204	240	268	292	317	338	352	359
Δ%	—	+11	+2,2	0	-1,4	+0,4	0	-0,7	0	+0,3	0	-0,3

$h_1 = 11,3$        $M_1 = 172$        $n_m = 1,131$   
 $h_2 = 19,4$        $M_2 = 317$        $a_m = 11,04$

Tabelle 64.

## Eiche.

(Lichtungsbetrieb, Wimmenauer, 1913.)

## 1. Standortsklasse.

h	9,3	14,1	18,3	21,8	24,2	26,3	28,3	30,0	31,5	33,9	35,8	37,3
M gem	100	170	229	269	299	325	349	372	392	427	455	478
M ber	112	171	225	269	299	326	351	373	392	423	448	470
Δ%	+12	+ 0,6	-1,7	0	0	+0,3	+0,6	+0,3	0	-0,9	-1,5	-1,7

$h_1 = 21,8$        $M_1 = 269$        $n_m = 1,023$   
 $h_2 = 31,5$        $M_2 = 392$        $a_m = 11,48$

## 2. Standortsklasse.

h	7,5	11,4	14,9	17,9	20,3	22,4	24,5	26,3	27,8	30,2	32,2	33,7
M gem	79	131	179	216	245	270	292	312	329	360	389	411
M ber	68	140	181	216	245	268	292	312	329	357	380	398
Δ%	-14	+ 6,9	+1,1	0	0	-0,7	0	0	0	-0,8	-2,3	-3,2

$h_1 = 17,9$        $M_1 = 216$        $n_m = 0,956$   
 $h_2 = 27,8$        $M_2 = 329$        $a_m = 13,70$

## 4. Standortsklasse.

h	3,8	5,9	8,0	10,1	12,2	14,2	16,2	17,9	19,4	22,0	23,9	25,1
M gem	44	68	94	119	141	161	179	196	211	236	257	274
M ber	51	75	97	120	141	161	179	196	211	236	253	265
Δ%	+16	+10	+3,2	+0,8	0	0	0	0	0	0	-1,6	-3,3

$h_1 = 12,2$        $M_1 = 141$        $n_m = 0,870$   
 $h_2 = 19,4$        $M_2 = 211$        $a_m = 16,00$

Obwohl für die vorstehenden Vergleiche zum Teil nicht die Schaftholz-, sondern die Derbholzmassen herangezogen werden mußten, ergaben sie dennoch ein befriedigendes Resultat, so zwar, daß die Parabelgleichung von der Form  $M = a_m h^n$ , bzw.  $G = a_g (h - 1,3)^n g$  allgemein zur Berechnung von Bestandesmasse und Grundfläche verwendet werden kann, sofern es sich um stetige Änderungen des Standraumes handelt.

Der vorstehende Versuch ist nicht der erste, der im Hinblick auf die Darstellung der Masse, bzw. der Massenfaktoren als Funktion der Höhe gemacht wurde. Es sollen von den bisher angestellten jedoch nur die allerwichtigsten im folgenden aufgezählt und kurz besprochen werden.

Eichhorn (Tanne, 1902, Allg. Forst- u. Jagdztg., 1904): Die Bestandesmasse und Grundfläche sind unabhängig von Alter und Bestandsgüte eine Funktion der mittleren Bestandeshöhe. (Gerhardt bestätigt für Fichte, Kiefer, Buche, 1909.)

Weise (Münd. Forstl. Hefte 1896): Die Baumformhöhe ist eine Funktion der Bestandeshöhe ohne Unterschied der Bodengüte. Sie hat von einer bestimmten Höhe an die Form einer Geraden. (Gerhardt bestätigt für Fichte, Tanne, Buche, Eiche, 1909.)

Kopetzky (Österr. Viertelj., 1902): In allen ungeschlossenen Hauptbeständen gleicher Holzart, Bonität und annähernd gleichen Schlusses verlaufen von einer gewissen Grundfläche an: 1. die Grundwalzen ( $G \times h$ ), 2. die Formgrundflächen ( $G \times F$ ), 3. die Holzmassen als gerade Linien.

In den zitierten Gesetzmäßigkeiten kommt im allgemeinen zum Ausdruck, daß die Masse oder die Massenkomponenten eine Funktion der Höhe (Grundfläche) unabhängig von Alter und Standortsgüte sind, und daß sie von einer bestimmten Höhe (Grundfläche) an als gerade Linien verlaufen.

Die hier unter Zugrundelegung eines Trägers gleichen Biegungswiderstandes ausgeführten Untersuchungen bestätigen im allgemeinen diese Gesetzmäßigkeiten:

1. Das Alter besitzt keinerlei Einfluß auf den Zusammenhang zwischen der Masse und den Massenkomponenten. Es können daher einzelne ( $G, F$ ) oder Kombinationen dieser ( $M, Gh, GF$  usw.) als unabhängige Variable und auch als abhängige Variable mit den unabhängigen in funktionellen Zusammenhang gebracht werden, ohne daß das Alter einen Einfluß hätte.

2. Die Standortsgüte hat auf die eben genannten Funktionen insolange keine Einfluß, als bei gleicher Höhe die gleiche Kronenform des Einzelstamms ohne Unterschied der Standortsgüte vorhanden ist. Obwohl nun bei gleicher Höhe dem schlechteren Standort zumeist ein größerer Standraum — insbesondere bei größeren Unterschieden in der Standortsgüte — und damit auch eine größere Masse des Einzelstamms entspricht, sind doch die Abweichungen meist nicht so groß, als daß sie nicht durch die geringere Staminzahl so weit herabgedrückt werden könnten, daß beim Bestand ein Einfluß der Standortsgüte nicht oder fast nicht mehr feststellbar ist.

Z. B. Guttenberg, Fichte, 20 m hoch (Normalstämme).

Standortsklasse	1	2	3	4
m.	0,413	0,398	0,412	0,489
M..	484	477	470	487

Schwankung beim Einzelstamm 20%, beim Bestand 2%.

3. Nach den theoretischen Ableitungen ergibt sich als Näherungsformel, welche den ganzen Verlauf dieser Kurven umfaßt, eine allgemeine Parabel der Form  $y = ax^n$ . Da der obere Teil dieser Parabeln sehr flach ist, kann für ihn eine Gerade gesetzt werden. Ich halte es jedoch für zweckmäßiger, die — richtigere — Parabelgleichung beizubehalten, da sie auch für geringe Höhen brauchbare Werte gibt. Das umso mehr, als durch Verwendung von Millimeterpapier mit Logarithmenteilung oder von einem Rechenschieber keine nennenswerte Mehrarbeit entsteht.

Trotz der guten Ergebnisse der Näherungsformel wird man für genaue Ertragsuntersuchungen von der punktweisen Auswertung Gebrauch machen, da sich für gewisse Fälle (vgl. die starke Lichtstellung von Guttenbergs Fichte in den letzten Altersstufen, bzw. den verhältnismäßig engen Schluß von Wimmenauers Kiefer in der Jugend) größere Abweichungen ergeben können, denen sich die Kurve nicht mehr anpaßt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die eigengesetzliche Betrachtungsweise des Bestandes zu guten Erfolgen geführt hat und zu den besten Hoffnungen berechtigt, obwohl die zugrunde liegenden Gedankengänge sehr großzügig waren. Hiebei darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Größenordnung, in der gedacht wird, auf das Ergebnis wenig Einfluß hat. Vielleicht ist auch bloß die gefühlsmäßige Einbeziehung des Menschen als Maßstab mitbestimmend,

weil man glaubt, daß sich die ausgleichende Wirkung auf einer Fläche von 1 ha, die man mit allen ihren Ungleichmäßigkeiten übersieht, weniger leicht vollzieht, als im Standraum eines Baumes.

Wenn man sich aber klar macht, daß es für das Ergebnis ziemlich gleichgültig ist, ob man aus den gemessenen Einzelstämmen ein Mittel nimmt und damit auf die mittleren Wachstumsbedingungen zurücksließt, oder ob man von Haus aus mittlere Wachstumsbedingungen annimmt und von diesen die Wuchsgesetze ableitet, dann erscheinen die Ergebnisse dieses Abschnittes nicht unerwartet günstig. Es ist vielmehr nur eine Frage der Zweckmäßigkeit, welches Verfahren angewendet wird.

## II. ANWENDUNG DER WUCHSGESETZE.

### 1. Aufstellung von Wachstums- und Ertragstafeln.

Wenn auch bei weitem noch nicht alle physiologischen Fragen über die Entstehung des Massenzuwachses unserer Bäume beantwortet werden können, so sind sie doch schon soweit geklärt, daß man die vorhandenen Erkenntnisse durch Annahmen zu einer Zuwachshypothese ausbauen darf. Wie im theoretischen Teil näher ausgeführt wurde, besagt sie, daß der jährliche Massenzuwachs mit der vorhandenen Blattfläche wächst, mit ihrer Höhe über dem Boden aber abnimmt. Mathematisch ausgedrückt  $M' = ah^n(b-h)$ , wobei  $M'$  den laufenden Massenzuwachs,  $h$  die Stammhöhe,  $a$ ,  $b$ ,  $n$  Konstanten bedeuten.

Die Verteilung dieses Zuwachses auf den Stamm erfolgt im Sinne der Metzgerschen Schaftformhypothese so, daß der Schaft ein Träger gleichen Biegungswiderstandes gegen alle angreifenden Kräfte ist. Hierbei überwiegt die Biegungsbeanspruchung durch die windgedrückte Krone so sehr, daß die übrigen Beanspruchungen durch Druck, Knick und Verdrehung vernachlässigt werden können.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich der Durchmesser des astfreien Schaftteiles nach der Formel  $d = 2a_s s^{1/k}$ , wobei  $2a_s$  eine Konstante und  $s$  den jeweiligen Abstand des Durchmessers vom Kronenschwerpunkt bedeuten. Für den besteten Stammteil ergibt sich unter der Annahme, daß die Krone ein Rotationsparaboloid sei, der Durchmesser  $d = 2a_k k^{n_k}$ , wobei  $k$  die jeweilige Länge der Krone über dem untersuchten Querschnitt und  $2a_k$  und  $n_k$  Konstanten sind.

Die Verbindung dieser beiden Hypothesen gestattet es, den Gang des Wachstums und die jeweilige Stammform vorauszusagen.

Im großen betrachtet, entsteht dadurch nämlich jene Spannung, die zu dem bekannten, zuerst aufsteigenden, dann abfallenden Verlauf der Zuwachskurve führt: Während nämlich die zunehmende Vergrößerung der Krone immer mehr Zuwachs erzeugen kann, verlangt die wachsende Höhe der Krone über dem Boden einen immer größer werdenden Anteil an Energie zum Transport der Nährlösung. Der zur Erzeugung von Zuwachs verbleibende Rest wird also immer kleiner.

Darüber hinaus wird aber mit zunehmender Entfernung der Krone vom Boden auch der Hebelarm immer länger, mit dem die windgedrückte Krone den Stamm beansprucht. Nicht genug also — infinitesimal gesprochen —, daß das letztzugewachsene äußerste Blatt weniger Massenzuwachs erzeugt, es verlangt auch noch eine größere Verstärkung des Stammträgers als sein Vorgänger. Es ist klar, daß hiebei bald jene Grenze erreicht wird, bei der ein Blatt soviel Zuwachs zur Verstärkung des Stammträgers verbraucht als es erzeugt und daß damit überhaupt die Grenze für das Wachstum erreicht wurde, weil neue Blätter mehr Nährstoffe verbrauchen als erzeugen würden.

Es ist Sache des Wirtschaftsführers, durch richtige Entnahme von Stämmen die Kronenentwicklung so zu leiten, daß sie einerseits möglichst lange groß und tief angesetzt bleibt, um viel Zuwachs zu erzeugen, daß sie aber anderseits früh genug hinaufrückt, um einen langen astfreien Schaft zu bilden.

Zweck von Wachstums- und Ertragstafeln ist es, den Betriebsführer bei dieser wichtigen und vielerlei Einflüsse berücksichtigenden Entscheidung zu beraten.

In ihrer heutigen Form erfüllen die Ertragstafeln diese Aufgabe allerdings nur unvollkommen, weil sie nur selten zwischen verschiedenen Entwicklungsgängen die Wahl lassen und der Vergleich des wirklichen mit dem Ertragstafelbestand Schwierigkeiten bietet.

Es soll nun versucht werden, einen Weg aufzuzeigen, der beschritten werden kann, um mit tragbaren Versuchskosten und -zeiten eine große Zahl von Entwicklungsgängen zu beschreiben.

Die beiden Hypothesen sollen hiebei den Schluß von den mit allen Zufälligkeiten und Unstimmigkeiten des Einzelfalles behafteten Stammanalysen auf die Entwicklung des Normalstamms dadurch leichter und sicherer gestalten, daß sie ein Zurückgehen auf die Ursachen dieser Unstetigkeiten gestatten. Diese werden immer in der Krone zu suchen sein, die in ihrer Doppelfunktion als Erzeuger des Zuwachses und als Belastung des Stammes für die Entwicklung und Form verantwortlich ist.

Darüber hinaus setzt uns aber die — wenn auch noch hypothetische — Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Kronenentwicklung und dem Massenzuwachs, bzw. der Schaftform in die Lage, unter willkürlicher Annahme der Kronenentwicklung auf die Entwicklung des Normalstammes zu schließen. Ja, es ist sogar denkbar, daß vom Normalstamm — als Bestandesmittelstamm — auf die Wachstumsverhältnisse des entsprechenden Bestandes geschlossen und damit eine gegenseitige Kontrolle zwischen dem Wachstum des Bestandes und dem des Einzelstammes geschaffen wird.

Tabelle 65.

Alter Höhe	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,4	3,31	7,95	12,68	17,32	21,95	27,08	31,99	36,05	39,81	42,71
1,3	1,44	6,96	11,54	16,08	19,79	23,83	27,14	30,36	33,28	35,81
4,3		2,16	8,85	14,62	18,68	22,65	25,95	28,85	31,37	33,57
8,3			3,50	11,38	16,65	21,00	24,42	27,20	29,71	31,75
12,3				6,22	13,16	18,57	22,32	25,25	27,58	29,52
16,3					8,07	13,82	18,49	22,10	24,80	26,92
20,3						1,07	6,99	12,71	17,71	21,41
23,3							0,50	7,11	13,10	17,52
25,3								2,75	9,03	13,92
27,3									5,03	10,00
29,3									0,30	4,68
31,3										3,24

Demnach werden unsere Untersuchungen folgenden Inhalt haben:

- Ausgleichung der Schaftkurve von kleinen Unregelmäßigkeiten.
- Anpassung der Schaftform und des Zuwachses an normale Wachstumsbedingungen.
- Übertragung der Wachstumsverhältnisse des Normalstammes auf den Bestand.
- Übergang auf geänderte Wachstumsverhältnisse.

Alle diese Möglichkeiten sollen nicht nur theoretisch, sondern auch an Hand eines Beispieles durchgearbeitet werden. Hierzu soll die einzige in Guttenbergs „Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge“, S. 84, veröffentlichte und in Tabelle 65 wiedergegebene Stammanalyse (Hintersee, Stamm V, 1. Standortsklasse) verwendet werden.

Es sei jedoch ausdrücklich betont, daß es sich hier nur um ein Rechenbeispiel handelt und daß ich nicht im Ernst der Ansicht bin, man könne aus einer einzigen Stammanalyse mit Hilfe zweier Hypothesen den Wachstumsverlauf von Normalstämmen und Beständen ableiten.

### a) Ausgleichung der Schaftkurve.

Die Ausgleichung der Schaftkurve muß für den astfreien Schaftteil und die Krone gesondert vorgenommen werden. Hierbei ist darauf zu achten, daß sich die beiden Kurven im Kronenansatz berühren. Die Vorgangsweise wurde S. 38 beschrieben.

Die Formeln für die Schaftkurve lauten:

- a) Krone:  $d = 2a_k k^{n_k}$ .
- b) Astfreier Schaft:  $d = 2a_s S^{1/3}$ .

In Tabelle 66 sind die Konstanten  $k$ ,  $2a_k$ ,  $n_k$  und  $2a_s$  dieser Gleichungen so zusammengestellt, wie sie sich aus der Untersuchung des Stammes Hintersee V ergeben.

**Tabelle 66.**

Alter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$h$	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
$k$		4,3	6,2	5,9	6,0	5,1	5,5	6,2	6,0	5,0
$2a_k$			0,01845	0,0191	0,0242	0,0208	0,0263	0,0219	0,0328	0,0298
$n_k$			0,86	0,885	0,798	0,97	0,87	0,99	0,845	0,95
$2a_s$		0,0478	0,0657	0,0728	0,0803	0,0908	0,0990	0,1053	0,1110	0,1158

Mit Hilfe dieser Konstanten und obiger Gleichungen wurden die Durchmesser der Stammanalyse berechnet und in Tabelle 67 zusammengestellt. Die Durchmesserdifferenzen in Zentimetern gegenüber den Messungen von Guttenbergs sind in der Tabelle 68 zusammengestellt. Sie liegen, vom Stammfuß abgesehen, zwischen +1,1 und

**Tabelle 67.**

Höhe \ Alter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,4		7,94	12,12	16,64	21,0	24,6	28,0	30,8	33,4	35,2
1,3		6,96	11,5	16,2	20,1	24,2	27,6	30,4	(33,3) 33,0	(35,8) 34,9
4,3		2,16	8,77	14,5	18,7	22,9	26,25	29,0	31,6	33,6
8,3			2,63	11,5	16,5	20,8	24,25	27,1	29,7	31,7
12,3				5,92	13,5	18,2	21,8	24,8	27,6	29,4
16,3					7,7	14,4	18,7	21,9	24,8	26,9
20,3					0,9	6,6	13,8	18,0	21,3	23,6
23,3						0,6	7,05	13,2	17,7	20,5
25,3							2,87	8,8	14,1	17,7
27,3								4,6	9,7	13,5
29,3								0,2	4,9	8,2
31,3										2,7

**Tabelle 68.**

Höhe	Alter								
	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,4	0	-0,6	-0,7	-0,1	-2,5	-4,0	-5,2	-6,4	-7,5
1,3		0	+1,0	+0,3	+0,4	+0,5	0	-0,3	-0,9
4,3		-0,1	-0,1	0	+0,2	+0,3	+0,1	+0,2	0
8,3		+0,1	+0,1	-0,1	-0,2	-0,2	-0,1	0	0
12,3			-0,3	+0,3	-0,4	-0,5	-0,5	0	-0,1
16,3				-0,4	+0,6	+0,2	-0,2	0	0
20,3					-0,2	-0,3	+1,1	+0,3	-0,1
23,3						+0,1	-0,1	+0,1	+0,1
25,3							+0,1	-0,2	+0,4
27,3								-0,4	-0,3
29,3								-0,1	+0,2
31,3									-0,5

—0,9 cm, aber nur in 3 von 62 Fällen über 0,5 cm. Das Ergebnis ist also durchaus befriedigend und deckt sich mit früheren Vergleichen.

Es ist klar, daß bei so geringen Durchmesserdifferenzen auch nur kleine Massendifferenzen 1 m zu erwarten sind. Die Prozente wurden in Tabelle 69 zusammengestellt.

**Tabelle 69.**

Stammasse ober 0,3 m über dem Boden.

Alter	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Höhe	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
m gem.	0,0101	0,0494	0,1610	0,3347	0,5728	0,8384	1,1348	1,4355	1,7044
m ber.	0,0101	0,0488	0,1588	0,3348	0,5756	0,8490	1,1282	1,4360	1,7008
m%	0,0	-1,2	-1,4	+0	+0,5	+1,3	-0,5	-0,04	-0,2

**b) Anpassung an normale Wachstumsverhältnisse.**

Wie aus Tabelle 69 hervorgeht, entstehen durch die Ausgleichung kleiner Formabweichungen nur so geringe Änderungen in der Masse — und damit auch in den Massenkomponenten —, daß sie nicht genügen, um einen regelmäßigen Kurvenverlauf zu erzielen. Die Ausgleichung der Schaftform hat sich eben nur auf den Formzustand eines bestimmten Augenblickes bezogen, während es sich nunmehr darum handelt, den Veränderungen zu folgen, denen Form und Zuwachs im Laufe der Zeit unterworfen sind, und hiebei alle Unregelmäßigkeiten auszuschalten, die durch Schwankungen der Witterung und plötzliche Standraumänderungen hervorgerufen werden.

Die Vorgangsweise kann hiebei sehr verschieden sein, je nach der Tiefe, mit der wir in die physiologischen Verhältnisse eindringen. Wie weit man dabei auch immer gehen mag, stets wird man mit Mittelwerten arbeiten müssen, die nicht mathematisch einwandfrei abgeleitet worden sind. Denn es ist z. B. unmöglich, die Leistung jeder einzelnen Spaltöffnung zu kontrollieren. Damit soll gesagt werden, daß zwischen der Mittelbildung von ausgewählten Stämmen oder Beständen, wie sie bisher zumeist zur Aufstellung von Wachstums- und Ertrags-tafeln angewendet wurde, und einem noch so tiefen Eindringen in die physiologischen Verhältnisse kein grundsätzlicher, sondern nur ein gradueller Unterschied besteht.

Da es praktisch unmöglich ist, die klimatischen und Standraum-verhältnisse zu erfassen, denen die Modellstämme während ihrer Entwicklung unterworfen waren, müssen wir aus der Form und Größe des beasteten Schafteiles auf jene ursächlichen Verhältnisse rück-schließen. Das muß möglich sein, weil sich ja — der Hypothese ent-sprechend — jede Veränderung an der Krone unmittelbar auf den

beasteten Stammteil auswirkt. Allerdings ist es eine offene Frage, wie lange es dauert, bis sich etwa eine plötzliche Freistellung vollständig ausgewirkt hat (vgl. S. 129).

Weiter als bis zu den Elementen des Kronenaufbaues —  $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $k$ ,  $n_k$  — kann nicht gegangen werden. Diese Formelemente können als Funktion der Stammhöhe dargestellt und gefühlsmäßig ausgeglichen werden. Von dieser Ausgleichskurve wird angenommen, daß sie jene Werte angibt, die sich bei gleichbleibendem Klima und stetig sich änderndem Standraum ergeben hätten.

Die Ausgleichung kann aber auch später einsetzen, indem die Masse, bzw. die Massenfaktoren (Durchmesser und Formzahl) als Funktionen der Höhe oder der Zeit dargestellt und ausgeglichen werden. Jeder dieser Schritte verringert aber die Genauigkeit des Ergebnisses, weil an den Zwischenpunkten das Eindringen neuer unkontrollierter Einflüsse möglich ist.

Entsprechend der doppelten Wirkung der Krone soll auch die Anpassung an normale Wachstumsverhältnisse in zwei Schritten erfolgen: Hinsichtlich der Schaftform und des Zuwachsses.

### a) Die Schaftform als Funktion der Kronenentwicklung.

Wie schon festgestellt wurde, beträgt der Stammdurchmesser  $d$  im Kronenteil  $d = 2a_k k^{n_k}$ . Nach der Metzgerschen Schaftformhypothese kommt diese Formel durch Vereinfachung des Ausdrückes

$$d = \sqrt[3]{\frac{64a_1 c}{\pi k_b (r+1)(r+2)}} k^{\frac{r+2}{3}}$$

zustande, wenn man

$$\sqrt[3]{\frac{64a_1 c}{\pi k_b (r+1)(r+2)}} = 2a_k \text{ und } \frac{r+2}{3} = n_k \text{ setzt. In dieser Gleichung}$$

bedeuten:  $a_1$  und  $r$  die Konstanten für die Kronenlängsschnittkurve  $D_k = a_1 k^r$ ,  $c$  den Winddruck pro Flächeneinheit und  $k_b$  Biegungsbeanspruchung des Holzes.

Eine genauere Betrachtung der Werte  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  ergibt folgendes

$$\text{Bild: } 2a_k = \sqrt[3]{\frac{64a_1 c}{\pi k_b (r+1)(r+2)}}. \text{ Da } r \text{ stets positiv ist und in den}$$

allermeisten Fällen zwischen Null und +1 liegt (S. 40), da ferner auch  $a_1$ ,  $c$  und  $k_b$  positive Werte sind, muß  $2a_k$  immer größer als Null sein. Um zu einem ungefähren Anhaltspunkt dafür zu gelangen, in welchen Grenzen  $2a_k$  schwankt, kann man annehmen, daß  $a_1$  und  $c$  während des Lebens eines Baumes konstant sind, während  $r$

zwischen Null und +1 schwankt. Die größten und kleinsten Werte von  $a_k$  würden sich dann etwa verhalten wie 1 0,7. Tatsächlich verhalten sich die Werte der Stammanalyse (Tabelle 66) wie 0,0328 0,01845 = 1 0,6.

Wenn man  $2a_k$  als Funktion der Höhe aufträgt (Graphik 11), dann ergibt sich trotz des gebrochenen Verlaufes der Verbindungslinie, daß sich die gemessenen Werte zwangslässig durch eine leicht ansteigende Gerade ausgleichen lassen, deren Gleichung  $2a_k = 0,000523 h + 0,01296$  lautet. Diese Ausgleichsgerade scheint umso eher zulässig zu sein, als die aus der Stammanalyse abgeleiteten Werte von  $2a_k$  wegen der geringen Zahl von in der Krone liegenden Durchmessern nicht sehr verlässlich sind, und als allen Abweichungen von  $2a_k$  — vielleicht eben deshalb — gegenteilige von  $n_k$  entsprechen, wodurch sich das Ergebnis bezüglich des Durchmessers wieder ausgleicht, da  $d = 2a_k k^{n_k}$ .

Auch die Kronenlänge  $k$  wurde nicht durch Messung, sondern aus dem Verlauf der Stammkurve ermittelt. Es wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, daß zwischen der statisch und physiologisch wirksamen Krone wegen des geringen Winddruckes auf den im Bestand steckenden unteren Teil der Krone erhebliche Unterschiede bestehen. Während sich die physiologische Krone mit der tatsächlichen deckt, wird die statische kürzer sein. Nur diese können wir aus Stammanalysen berechnen, da der Stamm nach statischen Gesichtspunkten aufgebaut ist.

Da die Kronenlänge durch die Bestandeserziehung in weiten Grenzen beeinflußbar ist, kann über ihre Abhängigkeit von der Höhe nicht viel ausgesagt werden. Jedenfalls geht die Kurve durch den Koordinationsursprung, weil für  $h = 0$  auch  $k = 0$  sein muß. Dann erfolgt ein rascher Anstieg, der sich später verlangsamt. Beim Lichtungsbetrieb kann es schließlich zu einem neuen Anstieg kommen.

Bei der untersuchten Stammanalyse beträgt die Kronenlänge ziemlich gleichmäßig 5—6 m. Eine Parabel von der Gleichung  $k = 3,2 h^{0,155}$  dürfte ihren Verlauf noch am besten charakterisieren. (S. Graphik 11.) Wie aus dem Graphik und auch aus der Gleichung hervorgeht, ergeben sich jedoch für Höhen unter 4 m, Kronenlängen, die größer als die Stammhöhe sind. Die hierdurch zu erwartenden Schwierigkeiten sollen aber mit Rücksicht darauf in Kauf genommen werden, daß sich die Kurve dem weiteren Beobachtungsverlauf gut anschmiegt und daß es sich hier nur um ein Rechenbeispiel handelt; obwohl bekannt ist, daß der Exponent, der hier 0,155 beträgt, im allgemeinen um 0,5 schwankt.

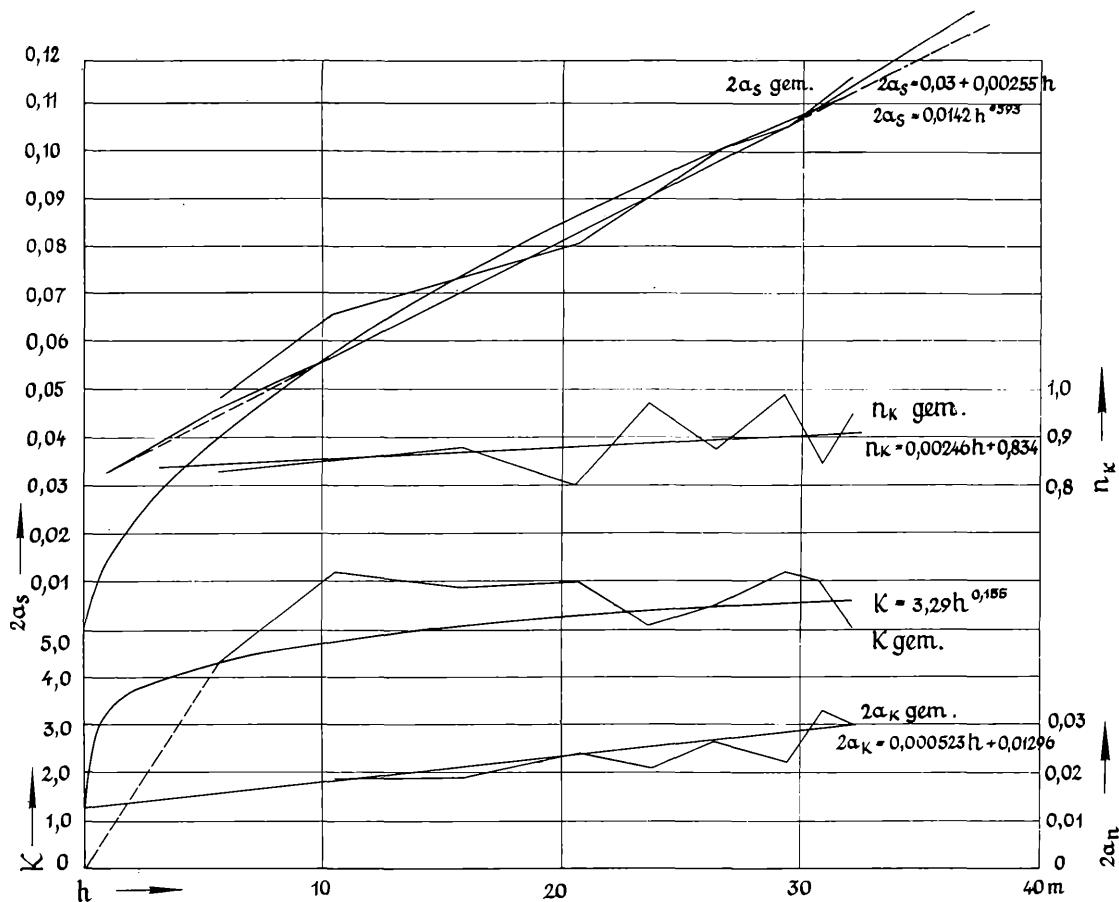


Fig. 11.

Der Potenzexponent  $n_k = \frac{r+2}{3}$ . Da  $r$  zwischen Null und +1 schwankt, liegen die Werte von  $n_k$  zwischen  $\frac{2}{3}$  und +1.

Nach Tabelle 70 beträgt  $n_k$  0,839—0,913.  $n_k$  ist somit nur geringen Schwankungen ausgesetzt. Trotzdem ist der Einfluß bedeutend, weil  $n_k$  als Potenzexponent vorkommt. Dem Kurvenverlauf dürfte am ehesten eine sanft ansteigende Gerade mit der Gleichung  $n_k = 0,00246h + 0,834$  gerecht werden. (Graphikon 11.)

Die mit Hilfe der drei Gleichungen berechneten Werte von  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  wurden in Tabelle 70 zusammengestellt.

**Tabelle 70.**

$h$	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6
$2a_k$	0,01401	0,01594	0,01845	0,02128	0,02373
$k$	3,66	4,30	4,74	5,04	5,23
$n_k$	0,839	0,848	0,859	0,873	0,885
$h$	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
$2a_k$	0,02531	0,02678	0,02835	0,02913	0,02981
$k$	5,37	5,47	5,55	5,60	5,63
$n_k$	0,892	0,899	0,906	0,910	0,913

Da durch diese drei Werte der statische Einfluß der Krone auf den Stamm voll erfaßt ist, müssen sich mit ihrer Hilfe auch die Stammkurven berechnen lassen. Für den Kronenteil ist das ohne weiteres möglich, für den astfreien Stammteil muß erst der Zusammenhang zwischen  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  einerseits und  $2a_s$  anderseits gefunden werden, damit die Gleichung  $d = 2a_s \sqrt[3]{S}$  ausgewertet werden kann.

Im Sinne der Metzgerschen Schaftformhypothese ist der Durchmesser im astfreien Schaftteil  $d = \sqrt[3]{\frac{32cF_k}{\pi k_b}S} = 2a_s \sqrt[3]{S}$ . Nimmt man an, daß der spezifische Winddruck  $c$  während des Lebens eines Baumes gleichbleibt oder sich zumindest proportional mit der windgedrückten Fläche  $F_k$  ändert, dann sind in der Gleichung nur  $F_k$  und  $S$  veränderliche Werte. Der für einen bestimmten Zeitpunkt konstante Wert  $2a_s$  ist somit im Laufe des Wachstums nur von  $F_k$  abhängig.

Da die Kronenabmaße, aus denen  $F_k$  zu ermitteln wäre, aus den Stammanalysen nicht erfassbar sind, muß hier ein ähnlicher Weg eingeschlagen werden, wie er zur Berechnung von  $2a_k$  und  $n_k$  gegangen worden ist.

$$\text{Nach S 34 ist } d_k^3 = D_k k^2 \frac{32 c}{\pi k_b (r+1)(r+2)},$$

$$D_k = \frac{d_k^3}{k^2} \cdot \frac{\pi k_b (r+1)(r+2)}{32 c}, \quad F_k = \frac{D_k k}{r+1} = \frac{d_k^3}{k} \cdot \frac{\pi k_b (r+2)}{32 c},$$

$$2a_s = \sqrt[3]{\frac{32 c F_k}{\pi k_b}} = \sqrt[3]{\frac{32 c d_k^3 \pi k_b (r+2)}{\pi k_b 32 c k}} = \frac{d_k}{k^{\frac{1}{3}}} \sqrt[3]{r+2}$$

$F_k$  ist als Fläche einer Parabel mit dem Exponenten  $r$  anzusehen.

Da  $n_k = \frac{r+2}{3}$ , so ist  $2a_s = d_k \sqrt[3]{\frac{3 n_k}{k}}$ . Setzt man für den Durchmesser  $d_k$  im Kronenansatz  $d_k = 2a_k k^{n_k}$ , dann erhält man

$$2a_s = \sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot k^{n_k} - \frac{1}{3} n_k^{\frac{1}{3}}.$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man davon ausgeht, daß der Durchmesser im Kronenansatz dasselbe sein muß, ob er nun aus der Gleichung für den beasteten oder astfreien Schaftteil berechnet wird.

$$d_k = 2a_s S^{\frac{1}{3}} = 2a_k k^{n_k}, \quad S = \frac{k}{3^{n_k}}, \quad \text{hieraus } 2a_s = \sqrt[3]{3} 2a_k k^{n_k} - \frac{1}{3} n_k^{\frac{1}{3}}$$

Aus dieser Ableitung ergibt sich besonders deutlich, daß der Zusammenhang zwischen  $2a_s$  einerseits und  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  anderseits nur ein Ausdruck der geometrischen Beziehungen zwischen den Parabeln des beasteten und des astfreien Schaftteiles ist, die sich im Kronenansatz berühren. Diese Beziehung gilt zwischen allen ähnlich verlaufenden Kurven ohne Rücksicht auf statische Konstruktionsbedingungen.

Tabelle 71.

h	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6
2a <sub>s</sub>		0,04618	0,05735	0,07025	0,08276
h	23,6	24,6	29,4	30,9	32,2
2a <sub>s</sub>	0,08991	0,09753	0,10567	0,1100	0,1136

Mit Hilfe der eben abgeleiteten Gleichung sind nun die Werte für  $2a_s$  berechnet und in Tabelle 71 zusammengestellt worden.

Für  $h = 0$  muß  $2a_s$  auch Null werden. Auf Grund der Gleichung  $2a_s = \sqrt[3]{\frac{32cF_k}{\pi k_b}}$  kann über den weiteren Verlauf der Kurve gesagt werden, daß die Werte von  $2a_s$  mit zunehmender Stammhöhe auch langsam zunehmen müssen, weil  $\sqrt[3]{F_k}$  langsam zunimmt. Der Verlauf der aus den Stammanalysen berechneten Werte ist aus dem Graphik 11 ersichtlich. Darüber sind auch die nach der Formel

$$2a_s = \sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot k^{n_k} - \frac{1}{3} n \frac{1}{k} \text{ berechneten Werte gezeichnet.}$$

Mit Hilfe der ausgeglichenen Werte von  $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  sind wir nunmehr in der Lage, die neuen Stamniformen zu berechnen, von denen wir dann annehmen, daß sie gleichen klimatischen und stetigen Standraumverhältnissen entsprechen. Hiemit ist bezüglich der Stammform der Übergang von der Stammanalyse zum Normalstamm vollzogen (Tabelle 73).

In Tabelle 74 sind die Differenzen zwischen den auf diese Weise berechneten und den wirklichen Durchmessern der Stammanalyse zusammengestellt. Sie betragen im Maximum +1,9 cm und überschreiten nur an 10 von 70 Vergleichsstellen + 1 cm. Auch die Massendifferenzen halten sich in tragbaren Grenzen, wie aus Tabelle 72 hervorgeht.

**Tabelle 72.**

h	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
m %		-32,7	-5,3	+2,9	+15,6	+1,5	-1,3	+3,3	-1,5	-3,2
m gem.	0,0008	0,0101	0,0494	0,1610	0,3347	0,5728	0,8384	1,1348	1,4355	1,7044
m ber.		0,0068	0,0468	0,1656	0,3871	0,5816	0,8278	1,1724	1,4143	1,6498

Es bleibt nunmehr nur noch die Frage zu erörtern, ob der Vorgang,  $2a_s$  mit Hilfe der ausgeglichenen Werte von  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  zu berechnen, auch wirklich der zweckmäßigste ist. Wenn auch die logische Richtigkeit dieser Abhängigkeit außer Zweifel steht, so muß doch anderseits bedacht werden, daß die aus den Stammanalysen berechneten  $2a_s$ -Werte die sicherste von den 4 Größen darstellen: einmal, weil am astfreien Schaft die größte Zahl der gemessenen Durchmesser liegt,

Tabelle 73.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,4		6,6	11,9	17,2	22,8	27,3	31,7	36,2	39,5	42,3
1,3		5,8	10,8	16,1	21,7	24,8	27,7	30,6	32,8	35,5
4,3		2,2	8,7	14,6	19,9	23,0	25,8	29,4	31,4	33,2
8,3			3,7	11,8	17,6	21,0	23,9	27,4	29,5	31,2
12,3				6,6	14,5	18,3	21,4	25,2	27,3	29,0
16,3					8,7	14,5	18,4	22,4	24,6	26,4
20,3						0,8	7,5	13,6	18,7	21,2
23,3							0,9	7,5	14,6	17,6
25,3								3,0	10,3	14,1
27,3									5,6	9,6
29,3									0,4	4,5
31,3										3,3

Tabelle 74.

Höhe der Meßstelle	Alter								
	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,4	-1,3	-0,8	-0,1	+0,9	+0,2	-0,3	+0,1	-0,3	-0,4
1,3	-1,2	-0,7	0	+1,9	0	+0,6	+0,2	-0,5	-0,3
4,3	0	-0,1	0	+1,2	+0,3	-0,1	+0,6	0	-0,4
8,3		+0,2	+0,4	+1,0	0	-0,5	+0,2	-0,2	-0,5
12,3			+0,4	+1,3	-0,3	-0,9	0	-0,3	-0,5
16,3				+0,6	+0,7	-1,1	+0,3	-0,2	-0,5
20,3				-0,3	+0,5	+0,9	+1,0	-0,2	-0,6
23,3					+0,4	+0,4	+1,5	+0,1	-0,4
25,3						+0,2	+1,3	+0,2	-0,2
27,3								-0,4	-0,6
29,3								-0,2	+0,2
31,3									+0,1

und dann, weil die Formel über die Kurve des astfreien Schafteiles nicht mit Annahmen über die Kronenform belastet ist.

Aus diesem Grunde scheint es zweckmäßiger zu sein, daß die  $2a_s$ -Kurve unabhängig von den übrigen ausgeglichen, und eine der anderen Kurven ( $2a_k$ ,  $k$ ,  $n_k$ ) als abhängig betrachtet wird.

Die geringsten Differenzen gegenüber den Messungen und den aus den ausgeglichenen Werten von  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  berechneten ergibt eine Gerade von der Form  $2a_s = 0,03 + 0,00255 h$ . Sie hat nur den Nachteil, daß sie für  $h = 0$   $2a_s = 0,03$ , also einen positiven Wert statt Null gibt. Die Parabelgleichung  $2a_s = 0,0142 h^{0,593}$  vermeidet diesen Nachteil, gibt aber etwas größere Differenzen. In Tabelle 75 sind den aus der Stammanalyse berechneten Werten die Berechnungen nach der Geraden und der Parabel gegenübergestellt. Die mit  $\Delta g\%$  be-

Tabelle 75.

$h$	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
Gerade	0,0351	0,0445	0,0568	0,0705	0,0825	0,0902	0,0973	0,1050	0,1088	0,1121
Parabel	0,0214	0,0398	0,0572	0,0734	0,0855	0,0928	0,0988	0,1058	0,1085	0,1113
$\Delta g\%$		-3,5	-0,3	+0,4	-0,3	+0,3	-0,2	-0,6	-1,1	-1,3
$\Delta p\%$		+19,1	+1,9	-2,3	-0,8	-1,2	-1,3	-0,5	+1,7	+2,8

zeichnete Rubrik gibt die Fehlerprozente der Geraden gegenüber den aus den ausgeglichenen Werten berechneten Zahlen an,  $\Delta p\%$  die Fehlerprozente der Parabel. Ein allgemeines Urteil darüber, welche der beiden Kurven zur Ausgleichung besser geeignet ist, kann natürlich auf Grund einer einzigen Stammanalyse nicht abgegeben werden.

Schließlich soll noch geprüft werden, mit welcher Genauigkeit die Näherungsformel  $m = ah^n$  (vgl. S. 130) dem Verlauf der aus den ausgeglichenen Formelementen ( $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$ ) berechneten Stammasse folgt. Zur Berechnung der beiden Konstanten wurden die Wertepaare  $h_1 = 15,9$ ,  $m_1 = 0,1700$  und  $h_2 = 30,9$ ,  $m_2 = 1,4143$  verwendet. Aus ihnen ergibt sich  $m = 0,00002514 h^{3,188}$ .

Die Ergebnisse der Berechnung ( $m_b$ ) wurden in Tabelle 76 den ausgeglichenen Werten ( $m_a$ ) gegenübergestellt. Sie ergeben für eine Näherungsformel eine sehr befriedigende Übereinstimmung.

Tabelle 76.

$h$	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
$m_a$		0,0068	0,0468	0,1656	0,3871	0,5816	0,8278	1,1724	1,4143	1,6498
$m_b$		0,0063	0,0453	0,1700	0,3882	0,5986	0,8558	1,206	1,414	1,613
$m\%$		-7,3	-3,2	+2,6	+0,3	+2,9	+3,4	+2,9	0	-2,2

*β) Der Zuwachs als Funktion der Kronenentwicklung.*

Durch die im vorhergehenden Abschnitt vorgenommene Ausgleichung der Stammelemente ist nicht nur die Stammform festgelegt worden: infolge der Doppelfunktion der Krone, als statisch und physiologisch wirksame, sollten die ausgeglichenen Werte auch das Maß für die Erzeugung des Zuwachses abgeben. Nun wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, daß sich statische und physiologische Krone nicht decken und daß deshalb bei der Übernahme der ausgeglichenen Werte zur Berechnung des Zuwachses von Haus aus mit Differenzen zu rechnen sein wird. Immerhin wird man aber von der statischen auf die physiologische Krone schließen und annehmen dürfen, daß beide in der Entwicklung parallel gehen; sei es, daß sie einander proportional sind, sei es, daß ein Zusammenhang nach der Art einer allgemeinen Parabel besteht.

Von den zur Berechnung des Stammes verwendeten Werten ( $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$ ) eignet sich  $2a_s$  am besten zur Charakterisierung der Krone, weil  $2a_s = \sqrt[3]{\frac{32c_1F}{\pi k_b}} = c_2 \sqrt[3]{F}$ , weil es somit nur von der Kronenlängsschnittsfläche abhängig ist. Die physiologische Wirkung der Krone hängt von der Zahl der Spaltöffnungen ab, die man sich über die Mantelfläche der Krone gleichmäßig verteilt denken kann. Wenn sich Kronenlängsschnitt und Mantelfläche irgendwie in mathematische Beziehung bringen ließen, könnte die Zahl der Spaltöffnungen durch  $2a_s$  ausgedrückt werden.

Nun ist die Erzeugende der Krone  $D_k = a_k r$ , wobei  $r$  zwischen null und eins schwankt. Für  $r = 0$  und  $r = +1$  ergeben sich für das Verhältnis von Mantelfläche zum Längsschnitt feste Werte, für die dazwischenliegenden Werte von  $r$  dagegen nicht. Wir wollen aber trotzdem die Annahme machen, daß auch für diese Zwischenwerte das Verhältnis annähernd konstant sei. Dann ergibt sich:  $2a_s = c_2 \sqrt[3]{F} \quad F = \frac{8a_s^3}{c_2^3}$ .

Nun ist  $m' = ah^n(b-h)$ , wobei  $ah^n$  die Zahl der Spalten als Funktion der Höhe darstellt. Wenn nun Kronenlängsschnitt und Mantelfläche einander proportional sind, dann ist  $ah^n = c_3 F = c_3 \cdot \frac{8a_s^3}{c_2^3} = c_3 \cdot 8a_s^3$ . Dann ist  $m' = c_3 \cdot 8a_s^3(b-h)$ . Besteht keine Proportionalität, sondern ist  $M_a = c_u F^n$  ( $M_a$  = Mantelfläche) dann ist  $m' = c_3 \cdot 8a_s^{3n}(b-h)$ ; bzw. wenn  $3n = m \quad m' = c_3 \cdot 8a_s^m(b-h)$ .

Die Umformung ermöglicht es somit, die ausgeglichenen Kronenelemente zur Berechnung des Massenzuwachses heranzuziehen und den Zusammenhang zwischen Schaftform und Zuwachs herzustellen.

Für die Durchführung der Berechnung ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, je nachdem man für  $2a_s$  die ausgeglichenen Werte der Stammanalyse einsetzt (Tabelle 71), oder ob man  $2a_s$  als Funktion der Höhe betrachtet (Tabelle 75). Überdies können die beiden Konstanten  $b$  und (oder)  $n$  angeschätzt werden. Es sind demnach folgende Berechnungsfälle möglich:

1.  $2a_s$  wird mit Hilfe der ausgeglichenen Werte von  $2a_k$ ,  $k$  und  $n_k$  ermittelt:  $m' = c \cdot 8a_s^m(b-h)$ .

a) Die Konstanten  $c$ ,  $m$  und  $b$  werden aus 3 den Stammanalysen entnommenen Wertpaaren berechnet.

$$c = \frac{m'}{8a_s^m(b-h)}; b = \frac{8a_{s2}^n h_2 m'_1 - 8a_{s1}^n h_1 m'_2}{8a_{s2}^n m'_1 - 8a_{s1}^n m'_2}$$

$$8a_{s1}^m \cdot 8a_{s2}^m \cdot m'_1 m'_3 (h_2 - h_1) - 8a_{s1}^m \cdot 8a_{s3}^m m'_1 m'_2 (h_3 - h_1) +$$

$$+ 8a_{s2}^m \cdot 8a_{s3}^m m'_1 m'_1 (h_3 - h_2) = 0$$

Hieraus  $m$ .

b)  $m$  wird mit  $m = 3$  angenommen;  $c$  und  $b$  werden wie unter a aus 2 Wertpaaren berechnet.

c) Die Maximalhöhe  $b$  wird aus dem Kurvenverlauf geschätzt;  $c$  und  $m$  berechnet.

$$m = \frac{\log \left( \frac{m'_2}{m'_1} - \frac{b-h_1}{b-h_2} \right)}{\log \frac{2a_{s2}}{2a_{s1}}}; c = \frac{m'}{2a_s^n(b-h)}$$

d) Die Maximalhöhe  $b$  und  $m$  ( $m = 3$ ) werden geschätzt.  $c$  wird wie unter c berechnet.

2.  $2a_s$  wird als Funktion von  $h$  berechnet: im vorliegenden Fall entweder als Gerade ( $2a_s = 0,03 + 0,00255 h$ ) oder als Parabel ( $2a_s = 0,0142 h^{0,593}$ ). Dann ist  $m' = c \cdot f(h)^n \cdot (b-h)$ . Für die Gerade ergibt sich dann  $m' = c \cdot (0,03 + 0,0255 h)^n \cdot (b-h)$  und für die Parabel  $m' = c \cdot (0,0142 h^{0,593})^n \cdot (b-h)$ , woraus man durch Zusammenziehen auf die S. 10 abgeleitete Form  $m' = a h^n (b-h)$  kommt. Daraus ergibt sich die wichtige Erkenntnis, daß dieser Formel implizit die Funktion  $2a_s = a h^m$  zugrunde liegt, sodaß diese Funktion nicht erst ausgerechnet werden braucht.

Als Näherungsformeln bestehen auch hier die unter 1 b bis 1 d angeführten Möglichkeiten.

Bei der Auswahl der zur Berechnung heranzuziehenden Werte von  $m'$  müssen wir uns aber darüber klar sein, daß durch die Ausgleichung der Stammform nach statischen Gesichtspunkten der Zusammenhang zwischen Höhe und Alter gelöst wurde und daß daher die Werte des laufenden Massenzuwachses  $m'$  nicht aus den Differenzen der ausgeglichenen Massen der Tabelle 72 gebildet, sondern daß auf die Werte der Stammanalyse zurückgegriffen werden muß. Das Ergebnis wurde in Tabelle 77 zusammengestellt.

**Tabelle 77.**

Alter .	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
Höhe .....	0,8	3,7	8,1	13,2	18,2	22,1	25,0	27,9	30,2	31,6
$m'$ .	0,0002	0,0093	0,0393	0,1116	0,1737	0,2381	0,2656	0,2964	0,3007	0,2689

**Tabelle 78.**

h. .	0,8	3,7	8,1	13,2	18,2
$2a_s$ ..		0,03944	0,05176	0,06380	0,07651
$m'_{\text{gem.}}$ ..	0,0002	0,0093	0,0393	0,1116	0,1737
$m'_{\text{ber.}}$ .	0,0109	0,0228	0,0545	0,1116	0,1828
$\Delta m' \%$ ..	—	+145	+38,7	0	+5,2
h. ..	22,1	25,0	27,9	30,2	31,5
$2a_s$ .	0,08633	0,09372	0,10160	0,10783	0,1118
$m'_{\text{gem.}}$ ...	0,2381	0,2656	0,2964	0,3007	0,2689
$m'_{\text{ber.}}$ .	0,2381	0,2651	0,2934	0,2880	0,2835
$\Delta m' \%$ ....	0	-0,2	-1,0	-4,2	+5,4

Es ist nicht nötig, den Vergleich mit den gemessenen Werten von  $m'$  in allen möglichen Fällen durchzuführen; einerseits, weil sich die ausgeglichenen Werte von  $2a_s$  mit der Geraden  $2a_s = 0,03 + 0,00255 h$  fast decken, anderseits weil die  $m' = f(h)$ -Kurve knapp nach Erreichung des Maximums abbricht, sodaß die Schätzung von  $b$

nur sehr ungenau erfolgen kann. Es wurden daher folgende Vergleiche ausgeführt:

$$h_1 = 13,2$$

$$h_2 = 22,1$$

$$h_3 = 30,2$$

$$m' = 0,116$$

$$m'_2 = 0,2381$$

$$m'_3 = 0,2880$$

(Der Wert  $m'_3$  wurde mit Hilfe einer Ausgleichskurve ermittelt)

Konstanten:  $n = 3,95$        $b = 38,56$        $c = 230,4$

$$m' = 230,4 \cdot 8 a_s^{3,95} (38,56 - h)$$

1 b.) Gemessene Werte:

$$h_1 = 13,2$$

$$h_2 = 30,2$$

$$m'_1 = 0,1116$$

$$m'_2 = 0,2880$$

Konstante  $n = 3$  (angenommen)       $b = 49,55$        $c = 11,871$

$$m' = 11,871 \cdot 8 a_s^3 (49,55 - h)$$

**Tabelle 79.**

h.	0,8	3,7	8,1	13,2	18,2
$2a_s$	0,032	0,03944	0,05176	0,06380	0,07651
$m'_{\text{gem.}}$	0,0002	0,0093	0,0393	0,1116	0,1737
$m'_{\text{ber.}}$	0,0189	0,0333	0,0510	0,1116	0,166
$\Delta m' \%$	—	+258	+30	0	-4
h.	22,1	25,0	27,9	30,2	31,5
$2a_s$	0,08633	0,09372	0,10160	0,10783	0,1118
$m'_{\text{gem.}}$	0,2381	0,2656	0,2964	0,3007	0,2689
$m'_{\text{ber.}}$	0,217	0,230	0,269	0,288	0,299
$\Delta m' \%$	-9	-13	-9	-4	+11

1 c.) Die Kurve  $m' = f(h)$  bricht zu bald nach Erreichung des Maximums ab, sodaß eine verlässliche Schätzung von  $b$  unmöglich ist. Je näher  $b$  bei dem aus 1 a errechneten Wert von 38,46 liegt, desto mehr werden sich die beiden Kurven einander nähern.

1 d.) Gemessener Wert:

$$h = 22,1 \quad m' = 0,2381 \quad 2a_s = 0,08633$$

$b$  (geschätzt): 40,     $n$  (angenommen): 3,0,     $c = 20,67$

$$m' = 20,67 \cdot 8 a_s^3 (40 - h)$$

**Tabelle 80.**

h.	0,8	3,7	8,1	13,2	18,2
2a <sub>s</sub>	0,032	0,03944	0,05176	0,06380	0,07651
m'gem.	0,0002	0,0093	0,0393	0,1116	0,1737
m'ber.	0,0264	0,0458	0,0912	0,1385	0,201
Δ m'%.	—	+392	+132	+24	+16
h..	22,1	25,0	27,9	30,2	31,5
2a <sub>s</sub>	0,08633	0,09372	0,10160	0,10783	0,1118
m'gem.	0,2381	0,2656	0,2964	0,3007	0,2689
m'ber.	0,238	0,254	0,261	0,282	0,288
Δ m'%..	0	-3	-12	-6	+7

2.) Berechnungsgrundlagen:

$$m' = a h^n (b - h)$$

$$h_1 = 13,2$$

$$h_2 = 22,1$$

$$h_3 = 30,2$$

$$m'_1 = 0,1116$$

$$m'_2 = 0,2381$$

$$m'_3 = 0,2880$$

$$m' = 0,000014441 h^{2,15} \cdot (43,32 - h)$$

**Tabelle 81.**

h .	0,8	3,7	8,1	13,2	18,2	22,1	25,0	27,9	30,2	31,5
m'gem..	0,0002	0,0093	0,0393	0,1116	0,1737	0,2381	0,2556	0,2964	0,3007	0,2689
m'ber. .	0,00038	0,0095	0,0456	0,1116	0,1857	0,2381	0,2680	0,2856	0,2880	0,2842
Δ m'%..	+90	+2,1	+16,0	0	+6,9	0	+0,9	-3,6	-4,2	+5,7

Überblickt man die nach den verschiedenen Formeln durchgeföhrten Berechnungen, dann kann das Ergebnis als befriedigend betrachtet werden. Die Zahlen, die unter Zugrundelegung der berechneten 2a<sub>s</sub>-Werte ermittelt wurden — Formel 1 a, die sich mit der Ausgleichsgeraden nahezu deckt — ergeben für Höhen über 10m im Durchschnitt etwas geringere Abweichungen als die mit Hilfe der Parabel (Formel 2) errechneten. Für geringere Höhen zeigt aber die Parabel eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Hiebei

ist wohl — wie schon bemerkt — die Annahme zutreffend, daß die Parabel die tatsächlichen  $2a_s$ -Werte besser wiedergibt als die Ausgleich der Kronenelemente.

Die Annahme von  $n = 3$  hat zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt. Damit wurden auch die zu dieser Wahl führenden Überlegungen nicht bestätigt.

Aus den angeführten Beispielen ergibt sich jedoch als wesentliches Ergebnis, daß der Schluß von der statischen auf die physiologische Krone möglich ist und trotz kleiner Schwierigkeiten zu praktisch verwertbaren und mit den bisherigen übereinstimmenden Ergebnissen führt.

### $\gamma)$ Das Wachstum als Funktion der Zeit.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Abschnitten die Entwicklung der Schaftform und des Zuwachses festgelegt worden ist, kann nun auch das Wachstum, als Summe aller Zuwächse, berechnet werden.

Die sich hiebei ergebende Schwierigkeit ist rein mathematischer Natur und wurde S. 24 und 25 erörtert. Im Sinne der dort gegebenen Anleitung wurde nun die Tabelle 82 berechnet, wobei

$$m = (2a_s)^2 \frac{\pi}{4} \left[ k \left( \frac{k}{3n_k} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{2n_k + 1} - \frac{0,7}{n_k} \right) + 0,6 \left( h - k + \frac{k}{3n_k} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad \text{und}$$

$$2a_s = 0,142h^{0,593}; \quad k = 3,29h^{0,155}; \quad n_k = 0,00246h + 0,834.$$

(Vgl. S. 147/148.)

Hierauf wurde das errechnete Alter als Funktion der Höhe aufgetragen und die runden Jahrzehnte entsprechenden Höhen abgelesen. In Tabelle 83 wurden diese Werte mit denen der ursprünglichen Stammanalyse und denen des Normalstammes der ersten Standortsklasse von Guttenbergs Ertragstafel verglichen, wobei jedoch für die beiden ersten Jahrzehnte nicht die berechneten Werte, sondern die der Stammanalyse verwendet wurden.

Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen Werten, dem Normalstamm Guttenbergs und den Berechnungen ist so befriedigend, wie sie nach dem bisherigen Gang der Untersuchungen zu erwarten war.

Da nun der Zusammenhang zwischen Alter und Höhe bekannt ist, kann auch in derselben Weise, wie für Tabelle 82 angegeben, die zugehörige Masse ermittelt werden. Desgleichen läßt sich mit Hilfe der ausgeglichenen Kronenelemente der Brusthöhendurchmesser be-

Tabelle 82.

$h$	$m$	$\Delta m$	$m'$	$\frac{\Delta m}{m'}$	$T$	$h$	$m$	$\Delta m$	$m'$	$\frac{\Delta m}{m'}$	$T$
1	$\emptyset$					18		0,09228	0,01828	5,03	46,78
2		0,00055	0,00026	2,11	(2,11)	19	0,31542				
3	0,00055					20		0,11419	0,02111	5,42	52,20
4		0,00314	0,00112	2,80	(4,91)	21	0,42963				
5	0,00369					22		0,13833	0,02369	5,90	58,10
6		0,00852	0,00254	3,35	20,63 (8,26)	23	0,56796				
7	0,01222					24		0,16455	0,02589	6,37	64,47
8		0,1652	0,00446	3,71	24,34	25	0,73251				
9	0,02874					26		0,19298	0,02756	7,02	71,49
10		0,02697	0,00680	3,97	28,31	27	0,92549				
11	0,05571					28		0,22346	0,02859	7,82	79,31
12		0,03958	0,00943	4,23	32,54	29	1,14895				
13	0,09556					30		0,25599	0,02883	8,88	88,19
14		0,05504	0,01229	4,48	37,02	31	1,40494				
15	0,15060					32		0,29000	0,02815	10,29	98,48
16		0,07254	0,01531	4,73	41,75	33	1,69494				
17	0,22314					34		0,3274	0,02640	12,40	110,88
						35	2,0227				

**Tabelle 83.**

Alter .	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
berechnet .	2,0	5,7	10,80	15,26	19,19	22,60	25,58	28,16	30,36	32,25
Stamm-analyse .	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
$\Delta$ .	0	0	+0,30	-0,64	-1,41	-1,00	-0,82	-1,24	-0,54	+0,05
$\Delta\%$ .	0	0	+2,9	-4,0	-6,8	-4,2	-3,1	-4,2	-1,7	+0,2
Normal-stamm . .	1,6	5,7	10,9	15,6	20,0	23,8	27,1	29,6	31,6	33,3
$\Delta$ .	+ 0,4	0	-0,10	-0,34	-0,81	-1,20	-1,52	-1,44	-1,24	-1,05
$\Delta\%$ .	+25,0	0	-0,9	-2,2	-4,0	-5,0	-5,6	-4,9	-3,9	-3,0

rechnen. Nach S. 97 ist dieser  $d = 2a_s \left( s + \frac{k}{r+2} - 1,3 \right)^{\frac{1}{3}}$ . Da  $S = h - k$  und  $\frac{r+2}{3} = n_k$ , ist  $d = 2a_s \left( h - k \frac{3n_k - 1}{3n_k} - 1,3 \right)^{\frac{1}{3}}$ , wobei für  $2a_s$ ,  $k$  und  $n_k$  dieselben Werte zu verwenden sind, wie für die Berechnung der Masse.

**Tabelle 84.**

Alter	d	$\Delta d$	h	$\Delta h$	m	Massenzuwachs		Formzahl f 1,3	Zuwachs- prozent
						period.	Durch- schnitt		
10	-2,3		2,0		0,0002		0,00002		
20	4,8	7,1		3,7		0,00057			
30	10,9	6,1		5,1	0,0059		0,00030	0,572	
40	15,8	4,9		4,46		0,00466			
50	20,0	4,2		3,93	0,0525		0,00175	0,523	
60	23,6	3,6	19,19		0,1590	0,01065			10
70	26,7	3,1	22,60			0,01663	0,00397	0,530	
80	29,4	2,7	25,58		0,3253		0,00652	0,540	6,8
90	(31,6) 31,9	2,2	28,16		0,5382	0,02129			4,9
100	(33,6) 34,5	2,0	30,36		0,7837	0,02455	0,00897	0,543	3,7
				2,58		0,02675	0,01122	0,546	2,9
				2,20	1,0512		0,01314	0,550	2,3
				1,89	1,3192	0,02680	0,01466	0,552	1,8
				1,5823		0,2631		0,01582	0,556

Unter Berücksichtigung der in Tabelle 67 angegebenen Werte für den Stammfuß kann daher der Verlauf der Stammesentwicklung durch Angabe von Höhe, Brusthöhendurchmesser, Formzahl, Masse und Massenzuwachs für volle Jahrzehnte in derselben Weise wie bei Guttenberg angegeben werden (vgl. Tabelle 84).

Bei Betrachtung dieser Tabelle fällt vor allem der negative Wert für den Brusthöhendurchmesser im Alter von 10 Jahren auf. Er hat — wie auch die niedrigen Werte für die Masse in 10 und 20 Jahren — seine Ursache in der für geringe Höhen nicht mehr zutreffenden Gleichung für die Kronenlänge (vgl. S. 146). Es hat keinen Sinn, an Hand einer einzigen Stammanalyse darüber zu diskutieren, ob die gewählte Gleichung durch eine andere zu ersetzen wäre, oder ob eine freihändig gezogene Ausgleichslinie besser geeignet wäre.

Tabelle 85.

Alter	d	$\Delta d$	h	$\Delta h$		Massenzuwachs		Formzahl 1,3 m	Zuwachss- prozent
						period.	Durch- schnitt		
10	0,6	—	1,5	—	0,001	—	—	—	—
20	7,6	7,0	5,6	4,1	0,014	0,0013	0,0007	0,565	—
30	14,3	6,7	10,7	5,1	0,079	0,0065	0,0026	0,470	9,6
40	20,0	5,7	4,9	—	0,0145	0,0056	0,0026	0,457	6,4
50	24,4	4,4	15,6	0,224	0,0209	0,0087	0,0023	0,462	4,4
60	27,6	3,2	20,0	0,433	0,0233	0,0111	0,0023	0,470	3,2
70	30,3	2,7	23,7	3,7	0,666	0,0245	0,0131	0,474	2,4
80	32,6	2,3	26,8	3,1	0,911	0,0248	0,0145	0,476	1,9
90	34,7	2,1	29,3	2,5	1,159	0,0246	0,0156	0,476	1,6
100	36,6	1,9	31,3	2,0	1,405	0,0240	0,0165	0,473	1,3

Vergleicht man das in Tabelle 84 dargestellte Wachstum mit der Entwicklung des Mittelstammes, 1. Standortsklasse, in Guttenbergs Werk (Tabelle 85), dann zeigt sich, daß der berechnete Stamm — der Originalaufnahme entsprechend — bei ungefähr gleicher Höhe wesentlich schwächer ist als Guttenbergs Durchschnitt, daß er diesem aber im höheren Alter sehr nahe kommt. Durch die Ausgleichung der Ertragselemente ( $k$ ,  $2a_k$ ,  $n_k$ ,  $2a_s$ ) ist also keineswegs der Gang der individuellen Entwicklung unkenntlich gemacht worden.

Der Übergang zum Mittelstamm würde vielmehr noch einen weiteren Schritt der Angleichung erfordern, der jedoch erst nach vergleichender Betrachtung des Verlaufes der Ertragselemente verschiedener Stämme getan werden kann. Es ist bedauerlich, daß Guttenbergs Stammanalysen an der Hochschule für Bodenkultur nicht mehr vorhanden sind, sodaß diese Vergleiche entfallen und der Übergang auf den Bestand nur mit Hilfe der einen vorhandenen Stammanalyse vollzogen werden kann.

### c) Übertragung auf den Bestand.

a) Die Stammzahl als Funktion der Stammform des Mittelstamms.

Wenn man vom Mittelstamm auf den Bestand übergehen will, muß man die Stammzahl kennen. Diese läßt sich nur aus den Kronenabmessungen und nur dann berechnen, wenn man annehmen darf, daß sich die Kronen der Bäume berühren oder daß wenigstens die Zwischenräume zwischen den Kronen mit diesen in einer eindeutigen Beziehung stehen.

An Stammanalysen können wir aber normalerweise die Kronenabmessungen nur für den Zeitpunkt der Fällung ermitteln. Für die übrigen Altersstufen sind wir auch in diesem Falle darauf angewiesen, aus der Schaftform auf die Krone zu schließen. Um diesen Schluß zu vereinfachen und zu erleichtern, soll auch hier die Annahme gemacht werden, daß der Kronenlängsschnitt die Form einer allgemeinen Parabel habe.

Es handelt sich nun darum, mit Hilfe der Kronenelemente ( $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $n_k$  und  $k$ ), allenfalls auch mit dem Stammdurchmesser  $d_k$  im Kronenansatz, den größten Kronendurchmesser, der ja im Kronenansatz liegt, zu berechnen.

Für die Kronenparabel gilt die Beziehung:  $D_k = 2a_1^r$ . In dieser Gleichung sind  $a_1$  und  $r$  unbekannt und daher durch die bekannten Kronenelemente zu ersetzen.

Von den 5 Werten, unter denen wir hiezu die Auswahl haben ( $2a_s$ ,  $2a_k$ ,  $n_k$ ,  $k$  und  $d_k$ ), sind 3 voneinander unabhängig ( $2a_k$ ,  $n_k$  und  $k$ ), während  $2a_s$  und  $d_k$  aus diesen dreien berechnet werden können. Zur Berechnung von  $D_k$  können also  $\binom{5}{3} = 10$  verschiedene Gleichungen aufgestellt werden. Unter diesen sind jene zum tatsächlichen Gebrauch auszuwählen, die die günstigste Fehlerfortpflanzung aufweisen.

Da sich, wie schon besprochen,  $2a_s$  von allen Werten am sichersten ermitteln läßt, bleiben noch  $\binom{4}{2} = 6$  Gleichungen zu untersuchen:

1.  $D_k = 2a_s \cdot k^r$ . Die Längsschnittfläche des Kronenparaboloides  $F_k = \frac{D_k \cdot k}{r+1}$ . Nun ist  $2a_s = c F_k$ . Somit  $\frac{D_k \cdot k}{r+1} = \frac{2a_s}{c}$ ;  $\frac{r+2}{3} = n_k$ , daher  $\frac{D_k \cdot k}{3n_k - 1} = \frac{2a_s}{c}$ ;  $D_k = \frac{2a_s(3n_k - 1)}{c \cdot k}$ . Hierin ist  $2a_s$ ,  $n_k$  und  $k$  veränderlich,  $c$  konstant.

2. und 3. Wenn man  $n_k$ , bzw.  $k$  unter Verwendung der S. 149 abgeleiteten Formel:  $2a_s = \sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot k^{n_k - \frac{1}{3}} n_k^{\frac{1}{3}}$  berechnet, erhält man 2 weitere Gleichungen:

$$k^{n_k - \frac{1}{3}} = \frac{2a_s}{\sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot n_k^{\frac{1}{3}}}; \quad k = \left( \frac{2a_s}{\sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot n_k^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{n_k - \frac{1}{3}}}$$

$$D_k = \frac{2a_s(3n_k - 1)}{c \cdot k} = \frac{2a_s(3n_k - 1)}{c \cdot \left( \frac{2a_k}{\sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot n_k^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{n_k - \frac{1}{3}}}} =$$

$$= \frac{2a_s^{\frac{3n_k - 4}{3n_k - 1}} (3n_k - 1) \sqrt[3]{3} \cdot 2a_k \cdot n_k^{\frac{1}{3}}}{c}$$

In dieser Gleichung weist der Ausdruck  $\frac{3n_k - 4}{3n_k - 1}$  eine so ungünstige Fehlerfortpflanzung auf, daß seine Verwendung unangebracht erscheint. Schwankt nämlich  $n_k$  zwischen 0,8 und 0,9, also um  $\pm 6\%$ , dann schwankt  $\frac{3n_k - 4}{3n_k - 1}$  um etwa  $\pm 120\%$ .

4., 5. und 6. Gleichungen, in denen der Schaftdurchmesser im Kronenansatz  $d_k$  vorkommt, können aus folgender Beziehung abgeleitet werden:

$$d_k^3 = D_k k^2 \frac{64c}{\pi k_b(r+1)(r+2)} \quad D_k = \frac{d_k^3(r+1)(r+2)}{k^2} \quad \frac{\pi k_b}{64c}$$

Berechnungen nach dieser Gleichung versprechen keine besondere Genauigkeit, weil die Konstanten durchwegs in der 2. oder 3. Potenz vorkommen.

Die größte Genauigkeit dürfte somit von der zuerst abgeleiteten Formel zu erwarten sein. Sie lautet:  $D_k = \frac{2 a_s (3 n_k - 1)}{c \cdot k}$

Die Stammzahl S pro ha beträgt  $S = \frac{7850}{F_k}$ , wenn man annimmt, daß sich die Kronen berühren.

$$F_k = \frac{D_k^2 \pi}{4} = \frac{2 a_s (3 n_k - 1)^2 \pi}{4 c^2 k^2}, \quad S = \frac{7850 \cdot 4 \cdot c^2}{\pi} \cdot \frac{k^2}{2 a_s^2 (3 n_k - 1)^2}$$

$$S = c_1 \left[ \frac{k}{2 a_s (3 n_k - 1)} \right]^2$$

Die Konstante  $c_1$  läßt sich aus einer Wertegruppe für S, k,  $2 a_s$  und  $n_k$  ermitteln — z. B. aus dem Zeitpunkt der Fällung des zu analysierenden Stammes — und dann zur Berechnung jener Stammeszahlen verwenden, die früheren Entwicklungsstadien des Stammes entsprechen.

Aus der Gleichung  $D_k = \frac{d_k^3 (r + 1) (r + 2)}{k^2} \cdot \frac{\pi k_b}{64 c}$  geht hervor, daß es

nur unter einschränkenden Bedingungen richtig ist, den Standraum durch die Bestandeskreisfläche zu charakterisieren. Das trifft nämlich nur für den Fall  $r = 1$  zu, weil nur dann  $d_k = 2 a_k \cdot k$  wird und die

$$\text{Gleichung in die Form } D_k = \frac{d_k^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 a_k^2}{d_k^2} \cdot \frac{\pi k_b}{64 c} = d_k \frac{2 a_k^2 \pi k_b \cdot 6}{64 c} =$$

$= c_1 d_k$  übergeht. Aber auch in diesem Falle muß  $2 a_k$  als konstant angenommen werden, damit  $D_k$  und  $d_k$  einander proportional werden, und dadurch auch  $F_k$  und  $g_k$ .

Die Charakterisierung des Standraumes durch Bestandesgrundflächen, sei es in Brusthöhe oder im Kronenansatz, kann somit nur für kürzere Entwicklungsabschnitte zugelassen werden, für die vereinfachte Annahmen zulässig sind. Für diesen Fall ist wohl auch der Ersatz des Durchmessers im Kronenansatz durch den Brusthöhendurchmesser zulässig.

Ob nicht trotz der festgestellten Unzulänglichkeit die Berechnung der Stammzahlen aus dem Verhältnis  $G / g$  genauere Werte liefert als wie  $\frac{7850}{F_k}$  können nur Versuche lehren.

$$\text{Ein strenger Vergleich der nach der Formel } S = c_1 \left[ \frac{k}{2 a_s (3 n_k - 1)} \right]^2$$

berechneten Stammzahlen mit den Werten von Guttenbergs Ertragstafeln läßt sich nicht durchführen, weil die Größen der Kronendurchmesser in den einzelnen Altersstufen für die untersuchte Stammanalyse unbekannt sind. Umgekehrt sind für den Bestandesmittelstamm wohl die zugehörigen Stammzahlen, aber keine Originalstammanalyse vorhanden. Als günstigste Lösung soll der Vergleich unter Zugrundelegung der ausgeglichenen Werte des Stammes V Hintersee und der Stammzahlwerte der ersten Standortsklasse durchgeführt werden.

**Tabelle 86.**

h	2,0	5,7	10,5	15,9	20,6	23,6	26,4	29,4	30,9	32,2
S ber		2580	1960	1390	1040	903	775	662	613	590
S gem		4400	2230	1450	1045	875	760	662	622	590
S%		— 41	— 12	— 4	— 1	+ 3	+ 2	0	— 1	0

Das Ergebnis des Vergleiches (Tabelle 86) ist sehr befriedigend, sogar für die Höhen von 5,7 und 10,5 m, wenn man bedenkt, daß die ausgeglichene Stammanalyse für diese Höhe eine ungewöhnlich lange Krone besitzt.

Auch wenn man nicht bis zu den Kronenelementen zurückgeht, sondern die Stammzahl als parabolische Funktion der Höhe betrachtet, erhält man ein befriedigendes Ergebnis. Die Formel lautet dann  $S = 50.272 h^{-1,28}$  und ergibt im Vergleich mit der Ertragstafel die in Tabelle 87 zusammengestellten Werte.

**Tabelle 87.**

h	1,4	5,3	10,0	14,7	19,0	22,8	26,0	28,7	32,9	35,8
S gem	—	4800	2400	1550	1160	932	792	693	563	480
S ber	33.500	5900	2640	1613	1160	915	776	683	573	516
S%	—	+18,6	+9,1	+3,9	0	—1,9	—2,1	—1,5	+1,7	+7,0

**$\beta)$  Berechnung des Bestandeswachstums.**

Durch Multiplikation der Werte für den Mittelstamm mit den Stammzahlen ergibt sich das Wachstum des Bestandes. Da aber mangels entsprechender Unterlagen das Wachstum des Mittelstamms nicht berechnet werden konnte, sollen die ausgeglichenen Werte der Stammanalyse mit den entsprechenden Vorbehalten verwendet werden.

Eine besondere Betrachtung ist bezüglich der Vorerträge nötig. Hier macht sich nämlich die vereinfachte Charakterisierung des ganzen Bestandes durch einen einzigen Mittelstamm als unzureichend geltend.

**Tabelle 88.**

Alter	Stammzahl	Stamm- grund- fläche m <sup>2</sup>	mittlere				Schaft- holz- masse	Zuwachs	
			Höhe m	Grund- stärke cm	Formzahl $1/_{1000}$	Massen- inhalt		perio- disch	durch- schnittl.
								Festmeter	
10	8470		2,0			0,0002	2		0,2
20	3412	6,2	5,7	4,8	572	0,0059	20	1,8	1,0
30	1862	17,3	10,80	10,9	523	0,0525	98	7,8	3,3
40	1316	25,8	15,26	15,8	530	0,1590	210	11,2	5,2
50	1040	32,7	19,19	20,0	540	0,3253	338	12,8	6,8
60	874	38,3	22,60	23,6	543	0,5382	470	13,2	7,6
70	764	42,5	25,58	26,7	546	0,7837	603	13,3	8,6
80	687	46,6	28,16	29,4	550	1,0512	723	12,0	9,0
90	631	48,6	30,36	31,6	552	1,3192	832	10,9	9,2
100	590	52,1	32,25	33,6	556	1,5823	934	10,2	9,3

Die Masse dieses Mittelstamms, multipliziert mit der Zahl der ausscheidenden Stämme, ergibt nämlich viel zu große Werte.

v. Guttenberg hat sich in der Weise beholfen, daß er die mittlere Masse der ausscheidenden Stämme mit  $1/3$  der des Mittelstamms annahm.

Bei der ausschließlich oder verstärkten Verwendung von Stammanalysen zur Festlegung des Bestandeswachstums befriedigt aber diese Lösung nicht. Sie ist auch nicht unumgänglich nötig, denn es ist ohne weiteres möglich, bei Auswahl der Probestämme die einzelnen

Stammklassen zu berücksichtigen und die Bestandesentwicklung durch Verwendung des prozentuellen Anteiles der einzelnen Stammklassen festzulegen.

Diese Vorgangsweise hätte den Verzug einer größeren Annäherung an die Wirklichkeit. Die erste Folge davon wäre, daß zum Teil die Originale der Stammanalysen zur Charakterisierung des Entwicklungs-ganges der einzelnen Stammklassen verwendet werden könnten, während die Entwicklung des Bestandesmittelstammes doch immer nur ein Konstruktionsergebnis ist.

**Tabelle 89.**

Alter	Stammzahl	Stamm- grund- fläche m <sup>2</sup>	mittlere				Schaft- holz- masse	Zuwachs	
			Höhe m	Grund- stärke cm	Formzahl 1/1000	Massen- inhalt		perio- disch	durch- schnittl.
								Festmeter	
10			1,4	1,5			14		1,4
20	4800	24,0	5,3	7,8	560		71	5,7	3,5
30	2400	35,0	10,0	13,6	500	0,07	175	10,4	5,8
40	1550	43,1	14,7	18,8	486	0,20	308	13,3	7,7
50	1160	49,2	19,0	23,3	480	0,39	449	14,1	9,0
60	932	53,9	22,8	27,1	478	0,63	587	13,8	9,8
70	797	57,5	26,0	30,4	477	0,90	713	12,6	10,2
80	693	60,4	28,7	33,3	475	1,19	823	11,0	10,3
90	620	62,7	31,0	35,9	473	1,49	919	9,6	10,2
100	563	64,5	32,9	38,2	471	1,78	1000	8,1	10,0

Als zweite Folge ergäbe sich automatisch der ausscheidende Bestand und schließlich die erleichterte Möglichkeit, auf die Bestandesentwicklung bei geänderter Erziehung zu schließen.

Mangels entsprechender Unterlagen erstrecken sich die Berechnungen der Ertragstafel (Tabelle 88) und die Angaben der Ertragstafel v. Guttenbergs (Tabelle 89) nur auf den Hauptbestand.

Wenn man berücksichtigt, daß die errechnete Ertragstafel auf nur einer Stammanalyse beruht, dann ist das Ergebnis des Vergleiches durchaus befriedigend und kann indirekt als weitere Bestätigung der zugrunde gelegten Gedankengänge gelten.

#### d) Übergang auf andere Wachstumsverhältnisse.

Während sich die bisherigen Untersuchungen im großen und ganzen innerhalb des durch eine Stammanalyse und den dazugehörigen Bestand gekennzeichneten Rahmens bewegten, soll nunmehr untersucht werden, ob es nicht möglich ist, auch dann Angaben über das Wachstum von Beständen zu machen, wenn in ihnen keine Messungen vorgenommen werden können. Sei es nun, daß eine andere Erziehung erwünscht ist, oder daß in ihnen Stammanalysen oder Ertragsmessungen aus anderen Gründen nicht vorgenommen werden.

Die Grundlagen für diese Angaben bilden jene Überlegungen, die zur Aufstellung der Zuwachsgleichung führten. Sie lautete:  $M' = a h^n (b-h)$ . Darin charakterisiert  $a$  hauptsächlich die Länge der Vegetationsperiode (ist aber leider auch noch von der Zahl der Spaltöffnungen und der Standortsgüte abhängig),  $n$  die Zahl der Spaltöffnungen — somit die Kronengröße — und  $b$  die Standortsgüte. Mit der Länge der Vegetationsperiode, der Erziehungsart und der Standortsgüte werden sich somit auch diese Koeffizienten ändern.

Demgemäß ist auch bei den Ertragstafeln eine Zergliederung nach der Länge der Vegetationsperiode, der Bodengüte und der Erziehungsart zu erwarten; eine Einteilung, in die sich ja auch die bisher aufgestellten Ertragstafeln einfügen. Nur bestehen bezüglich der Vegetationsperiode und der Erziehungsart noch mancherlei Lücken. Auch werden, insbesondere im Gebirge, die Lagen mit geringen Erträgen aufzuspalten sein in solche mit kurzer Vegetationsdauer und solche mit geringer Bodengüte.

Es handelt sich nunmehr darum, festzustellen, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, aus der Länge der Vegetationsperiode, der Standortsgüte und der Erziehungsart auf die entsprechenden Konstanten in der Zuwachsgleichung zu schließen.

##### a) Die Länge der Vegetationsperiode.

Wie bereits erwähnt, beeinflußt die Länge der Vegetationsperiode lediglich die Öffnungsduer der Spalten und damit die Konstante  $a$ .

Die Zahl der Spalten ändert sich nicht; mit ihr bleibt auch die Kronenform und infolgedessen die Stammform die gleiche. Der bisherige Zusammenhang zwischen Höhe und Masse bleibt somit nicht nur für den Einzelstamm, sondern auch für den Bestand gewahrt.

Über Beginn und Länge der Vegetationsperiode liegen zwar Veröffentlichungen vor, denen Anhaltspunkte über die Größe der Konstanten  $a$  entnommen werden könnten, sie reichen aber nicht aus,

um die vorhandenen Ertragstafeln in dieser Richtung zu ergänzen. Zudem ist a, wenn auch vorwiegend, so doch nicht ausschließlich von der Länge der Vegetationsperiode abhängig. Es läßt sich somit nicht erwarten, daß a der Vegetationsdauer proportional ist. Die genauen Zusammenhänge können jedoch erst ermittelt werden, wenn sich Vergleiche zwischen den einzelnen Ertragstafeln und der zugehörigen Vegetationsdauer anstellen lassen.

Tabelle 90.

	Konstante	Standortsklasse				
		1	2	3	4	5
Weitra .	a	0,07711	0,05150	0,04375	0,03616	
	b	38,35	33,46	29,14	23,67	
	n	0,780	0,935	0,990	1,070	
Hoch- gebirge .	a	0,07628	0,05439	0,04584	0,03772	0,03467
	b	41,07	35,225	30,314	26,000	21,195
	n	0,718	0,851	0,903	0,957	0,927
Pan- veggio .	a	0,03118	0,02930	0,02505		
	b	37,90	31,63	26,19		
	n	0,940	0,956	0,958		

Daß ein solcher Zusammenhang besteht, geht aus den in Tabelle 90 zusammengestellten Werten der Ertragstafeln von Guttenberg hervor. Aus ihnen läßt sich jedenfalls eine Abnahme der Werte von a mit der Verkürzung der Vegetationsdauer in der Reihe: Fichte von Weitra, im Hochgebirge und von Panneveggio feststellen.

### β) Standortsgüte.

Auch die Standortsgüte übt keinen direkten Einfluß auf die Zahl der Spaltöffnungen aus. Daher bleibt auch hier die Stammform und die Beziehung zwischen Höhe, Masse und Stammzahl ungeändert.

Die Standortsgüte beeinflußt (vermutlich über die Öffnungsduer der Spalten) die Konstante b; u. zw. so, daß b als Ausdruck für die Standortsgüte gesetzt werden kann. Der Bau der Zuwachsgleichung ist derart, daß b gleichzeitig die maximale Höhe angibt, die der betreffende Bestand erreichen kann (vgl. Tabelle 90).

Die Anpassung einer Ertragstafel an eine andere Standortsklasse besteht somit hauptsächlich darin, daß b, der neuen Maximalhöhe entsprechend, geändert wird. Daneben wäre auch noch der — vermutlich geringe — Einfluß auf a zu berücksichtigen.

### γ) Erziehungsart.

Die Erziehungsart beeinflußt die Kronenform und daher auch die Stammform; in der Zuwachsgleichung in erster Linie die Konstante n, dann aber auch a.

Es handelt sich nun darum, den Zusammenhang dieser Koeffizienten mit den Entwicklungsgängen zu ermitteln. Hiezu gibt es zwei Wege:

a) Es werden Stammanalysen aus Beständen benutzt, die zwar die gewünschte Kronenform besitzen, aber Gebieten mit anderer Vegetationsdauer und anderer Standortsgüte entstammen. Durch entsprechende Änderung der Konstanten a und b können sie verwendet werden.

b) In Tabelle 59 wurde gezeigt, daß sich die aus Stammanalysen berechneten Stammassen, bzw. die den Ertragstafeln entnommenen Bestandesmassen als parabolische Funktion der Höhe mit der Gleichung  $M = ah^m$  darstellen lassen, wobei a und m von der Kronenentwicklung abhängen. Da auch in der Zuwachsgleichung  $M' = ah^n(b-h)n$  und teilweise auch a von der Kronenentwicklung abhängen, muß ein Zusammenhang zwischen den beiden Potenzexponenten n und m bestehen.

In Tabelle 91 wurden die aus den drei Ertragstafeln für Weitra, das Hochgebirge und Paneveggio berechneten Koeffizienten n und m, sowie ihre Abweichungen von einer gefühlsmäßig gezogenen Ausgleichskurve zusammengestellt.

Mit Ausnahme von Paneveggio 1. und 2. Standortsklasse bestätigen die berechtigten Werte den vermuteten Zusammenhang. Das Grundlagenmaterial ist natürlich auch hier viel zu gering, als daß es ein tieferes Eindringen gestatten würde.

## 2. Zusammenfassung.

Die Verbindung der Metzgerschen Schaftformhypothese mit meiner Zuwachshypothese ermöglicht es, die Stammanalyse viel besser auszuwerten als das bisher der Fall war. Es wurde gezeigt, wie sich kleine Abweichungen vom regelmäßigen Verlauf der Schaftform ausgleichen lassen und wie es möglich ist, auf rechnerischem Wege jene Unstetigkeiten in den Wachstumskurven zu beseitigen, die durch plötzliche Standraumveränderungen und die Ungleichheiten der Witterung hervorgerufen werden und die in jeder Stammanalyse vorzufinden sind.

**Tabelle 91.**

	Weitra				Hochgebirge					Paneveggio		
	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3
n	0,780	0,935	0,990	1,070	0,718	0,851	0,903	0,957	0,927	0,940	0,956	0,958
m	1,486	1,567	1,636	1,736	1,463	1,499	1,576	1,617	1,603	1,495	1,530	1,596
Ausgleich m	1,486	1,580	1,636	1,736	1,463	1,515	1,550	1,600	1,570	1,582	1,595	1,596
$\Delta$ m	0	-0013	0	0	0	-0,016	+0,026	+0,017	+0,033	+0,087	-0,065	0

Von diesem Normalstamm ausgehend, läßt sich auch der Wachstumsverlauf des zugehörigen Bestandes berechnen, wenn man berücksichtigt, daß sich in ihm die Form und Größe der windgedrückten Krone widerspiegelt.

Die Berechnungen wurden schrittweise mit einer Stammanalyse, bzw. mit den Ertragstafeln von Guttenberg verglichen und in guter Übereinstimmung gefunden.

Die eingangs erwähnten Hypothesen gestatten vermutlich darüber hinaus auch den Wachstumsgang von Stämmen und Beständen bei Änderung des Klimas, der Standortsgüte und der Erziehungsart vorauszusagen.

Sie geben somit nicht nur die Möglichkeit, Ertragstafeln mit größerer Genauigkeit und geringerem Aufwand aufzustellen, sondern zeigen auch einen Weg auf, der es ermöglichen dürfte, alle bisher aufgestellten Ertragstafeln nach Holzarten zusammenzufassen, einheitlich nach Klima, Standort und Erziehungsart zu gliedern und in ein einziges Tafelwerk zu vereinigen.

Sie gestatten schließlich, Betrachtungen über die zweckmäßigste Erziehungsart anzustellen.

## D. GESCHICHTLICHER TEIL.

Die bestehenden Schwierigkeiten bei der Beschaffung der einschlägigen Literatur lassen einen geschichtlichen Rückblick als ein mißliches Unternehmen erscheinen. Die folgenden Ausführungen haben daher mehr summarischen Charakter, weil die im Literaturverzeichnis genannten Veröffentlichungen zum Teil nur auszugsweise zugänglich waren.

Für die Zwecke des vorliegenden Buches ist aber der Mangel einer bis ins einzelne gehenden geschichtlichen Darstellung kaum nachteilig und kann daher mit in Kauf genommen werden.

Die ersten Versuche, die Gesetze des Wachstums und der Stammform unserer Waldbäume durch Kurvengleichungen zu erfassen, wurde ziemlich bald gemacht, nachdem man das Vorhandensein solcher Gesetzmäßigkeiten zahlenmäßig festgestellt hatte.

Die erste eingehende Darstellung von „Gesetzen der Stammbildung“ verdanken wir Preßler (1865), doch hatten sich natürlich schon die Entdecker der Kubierungsformeln (1800—1840) Gedanken über die Stammform gemacht.

Wachstums- und Zuwachsgleichungen wurden — entsprechend der späteren Erkenntnis der Gesetzmäßigkeiten — erst viel später versucht. Weber (1891) hat die erste Wachstumsgleichung mit einer Art physiologischem Unterbau aufgestellt, Koller (1886) die erste Zuwachsgleichung auf rein mathematischem Weg.

Von diesem Zeitpunkt an hat sich eine große Zahl von Forschern mit diesen Fragen beschäftigt. Immer wieder wurde versucht, Formeln für Kurven zu finden, die sich den Meßergebnissen möglichst genau anschmiegen und eine Vorhersage für die Weiterentwicklung gestatten; und immer wieder wurde versucht, die Ursachen jener Gesetzmäßigkeiten zu ergründen.

Die Schwierigkeiten liegen meiner Ansicht nach nicht einmal sosehr auf der physiologisch-mechanisch-mathematischen Seite als vielmehr in der Unhandlichkeit und im langsamem Wachstum des Untersuchungsmaterials. Infolge der Vielfalt der Einflüsse auf das Wachstum und die Baumform ist es außerordentlich mühsam und zeitraubend, das erforderliche umfangreiche Untersuchungsmaterial zustande zu bringen. Überdies stellt die Reinigung des Materials von allen zufälligen Fehlern eine so bedeutende wissenschaftliche Leistung dar, daß schon die Darstellung „des mittleren Zustandes“ weniger Erscheinungsformen genügt, um ein Forscherleben auszufüllen.

Diese Umstände lassen es begreiflich erscheinen, daß sich verhältnismäßig wenige Forscher eingehend mit Wachstumsgesetzen beschäftigten, und daß die Überprüfung des Zutreffens der aufgestellten Formeln infolge Materialmangels nur in geringem Umfange möglich war. Dagegen lagen die Verhältnisse hinsichtlich der Stammform etwas günstiger.

## I. WUCHSGESETZE.

Eine eingehende Darstellung der bisher festgestellten mathematischen Beziehungen zwischen Höhe (Masse, Grundfläche) und der Zeit verdanken wir Peschel. Er teilt die Formeln in solche mit und ohne physiologischen Unterbau ein. Zu den ersten gehörten die Formeln von Weber, Tischendorf, Hugershoff, Robertson, Mitscherlich und Kövessi; zu letzteren die von Levakovič, Korsuň und Petterson.

Der physiologische Unterbau geht nicht auf Ergebnisse der Pflanzenphysiologie zurück, sondern nimmt eine „Wuchskraft“ an, der mit zunehmender Höhe wachsende Widerstände entgegentreten. Nimmt man, wie S. 8 ausgeführt wurde, an, daß dieser Wuchskraft der Transpirationsstrom entspricht, dann kann dadurch der Zusammenhang

mit den physiologischen Verhältnissen hergestellt werden. Die Ansätze der Formeln decken sich allerdings nicht mehr mit denen meiner Zuwachshypothese.

Die nach diesen Formeln berechneten Werte stimmen im allgemeinen mit den Messungsergebnissen überein. Die Vergleiche sind jedoch ziemlich dürftig, was zum Teil dem Mangel an geeigneten Vergleichswerten, zum anderen Teil der Umständlichkeit der Konstantenermittlung zugeschrieben werden muß.

Die praktische Bedeutung dieser Gleichungen ist gering, weil ihr Geltungsbereich nicht nachgewiesen wurde. Auch bei den Formeln mit physiologischem Unterbau ist dieser zu wenig überzeugend, als daß daraus der Geltungsbereich abgeleitet werden könnte. Vollends versagen aber alle Formeln bei unstetiger Erziehungsart (vgl. Wiedemanns Fichte).

Deshalb ist Schiffels Versuch, Ertragstafeln auf rein mathematischer Grundlage aufzustellen, ziemlich vereinzelt und unbefriedigend geblieben, obwohl seine grundsätzliche Bedeutung nicht hoch genug eingeschätzt werden kann. Auch die Versuche von Gehrhardt sind, meines Erachtens mit Recht, stark umstritten worden, sobald sie den Rahmen der Beobachtungen verlassen haben (Schnellwuchstrieb).

Aber darin läge gerade der Vorteil der Formeln, daß sie eine Extrapolation über das beobachtete Alter, die Erziehungsart oder die Standortsgüte hinaus gestatten. Sie ist jedoch außer in den beiden eben besprochenen Fällen nirgends versucht worden.

## II. SCHAFTFORMGESETZE.

Die Kenntnis der Schaftform bietet die unentbehrliche Grundlage zur Bestimmung des Massengehaltes.

Der komplizierte, mathematisch schwer zu erfassende Verlauf der Begrenzungskurve im Einzelfall und die Verschiedenartigkeit dieser Kurven von Stamm zu Stamm haben es aber mit sich gebracht, daß diese Kenntnis trotz zahlreicher Versuche auch heute noch ziemlich mangelhaft ist.

Die ersten und zahlreichsten Versuche, dieser Mannigfaltigkeit Herr zu werden, liefen darauf hinaus, den Schaft durch senkrecht auf seine Längsachse geführte Schnitte in einzelne, verhältnismäßig einfach begrenzte Körper zu zerlegen und diese als Stütze von Rotationskörpern zu betrachten, deren mathematischer Ausdruck ebenfalls möglichst einfach ist.

Als Gleichung der Begrenzungskurve dieser Rotationskörper wurde in allen Fällen die allgemeine Parabel von der Form  $y = ax^n$  gewählt, die tatsächlich in bezug auf Einfachheit des Baues und Schmiegksamkeit am geeignetsten sein dürfte.

Es wurde getrachtet, den zur Inhaltsbestimmung abgeleiteten Formeln eine solche Form zu geben, daß sie womöglich die Vollkörper und Stutze der mathematisch einfachsten Paraboloiden (appolonisches Paraboloid, Neiloid und Kegel) mit einem praktisch unwesentlichen Fehler kubieren und sich überdies nur auf wenige zu messende Durchmesser stützen (Huber, Smalian usw.).

Das Anwendungsgebiet dieser Formeln ist auf Stammstücke beschränkt, für die der Exponent  $n$  konstant bleibt.

Ein bedeutender Schritt nach vorwärts bestand darin, daß man den Schaft in seiner ganzen Ausdehnung durch eine Kurvengleichung zu erfassen versuchte (Simony, Lorenz, Kreutzer, Wimmenauer usw.).

Der eigenartige S-förmige Verlauf der Begrenzungskurve des Schaftlängsschnittes bringt es mit sich, daß die aufgestellten Kurvengleichungen ziemlich kompliziert sind. Dasselbe gilt auch von den aus ihnen abgeleiteten Kubierungsformeln, die meist eine größere Anzahl gemessener Durchmesser erfordern. Da überdies über die Genauigkeit, mit welcher diese Formeln arbeiten, fast keine Untersuchungen gemacht wurden, hat sich auch kein Urteil über das Zutreffen der angenommenen Kurvengleichungen gebildet. Der Ansporn seitens der Praxis zum weiteren Ausbau dieser Methoden fehlt, da die sich ergebenden Formeln hauptsächlich zur Kubierung stehender Bäume verwendet werden sollen, hiefür aber infolge der größeren Anzahl zu messender oberer Durchmesser praktisch kaum in Betracht kommen.

Alle diese Formeln sind auf rein induktivem Wege aufgestellt worden. Es ist klar, daß man auch hier, wie schon oft, zu viel einfacheren Ergebnissen gelangt, wenn das Gesetz der Stammbildung bekannt ist.

Es bestehen hierüber zwei einander gegenüberstehende Theorien: eine physiologische und eine physische.

Die physiologische Erklärung, deren Begründer Pressler in seinem „Gesetz der Stammbildung“ ist und die von Jaccard (Naturw. Zeitschr. f. Land- u. Forstw., 1913) neuerlich in hervorragender Weise vorgetragen wurde, besagt, der Schaft sei ein Körper gleicher Wasserleitungskapazität, d. h. die wasserleitende Querschnittsfläche sei proportional dem über ihr befindlichen Blattvermögen.

Das Zutreffen dieser Behauptung läßt sich am besten im astfreien Schaftteil kontrollieren. Da nämlich über jedem Punkt desselben das gleiche Blattvermögen vorhanden ist, müßte die wasserleitende Querschnittsfläche in jeder beliebigen Höhe des astfreien Schafthes gleich groß sein. Nun erfolgt aber die Wasserleitung bekanntlich im äußersten oder in den äußersten Jahrringen, es müßte somit der Querflächenzuwachs an jeder Stelle des astfreien Schaftteiles gleich groß sein.

Der erste Einwand, der gegen diese Theorie erhoben wird, ist der, daß der Querflächenzuwachs am Stammfuß viel größer ist, als im höheren Teile des astfreien Schafthes. Ihm begegnet Jaccard, indem er sagt (l. c. S. 279): „Die Ausbreitung der Stammbasis gleicht durch Zunahme der Leitungsfläche die Abnahme der Leitungsgeschwindigkeit des Wassers aus, welche letztere durch die mehr oder weniger horizontale Lage der großen Wurzeln bedingt ist.“

Wir werden somit für den Stammfuß keinen gleichbleibenden Querflächenzuwachs verlangen dürfen, sondern nur für den übrigen astfreien Schaftteil.

Da in der forstlichen Literatur über den Verlauf des Querflächenzuwachses in den verschiedenen Stammhöhen vielfach Untersuchungen angestellt wurden, war es leicht, das Zutreffen der angegebenen Gesetzmäßigkeit zu überprüfen.

Guttenberg, der sich in seinem Werk „Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge“ sehr eingehend mit dem Verlauf des Querflächenzuwachses befaßt hat, kommt auf Grund seiner Messungsergebnisse zum Schluß, daß die angegebene Gesetzmäßigkeit nicht zutrifft (l. c. S. 23). Es findet vielmehr im allgemeinen eine Abnahme des Querflächenzuwachses mit zunehmender Höhe statt. Nur bei den Normalstämmen der ersten Stammklasse stellte er im Alter von 60 bis 90 Jahren eine leichte Zunahme, bzw. ein Gleichbleiben durch einige Meter fest.

Aber auch der Jaccards Theorie entsprechende und von ihm vermutete gleichartige Verlauf von Kronenoberflächenzunahme und Querflächenzuwachs in den einzelnen Altersstufen findet nicht statt.

Das läßt sich ebenfalls aus Guttenbergs bereits zitierten Werk durch Entnahme der Angaben über die Querflächenzuwächse in Brusthöhe für das Alter 70, 100 und 120 Jahre für die erste und vierte Standortsklasse, sowie der Höhen- und Kronenprozente für die gleichen Zeiträume nachweisen.

Nimmt man nun an, was zulässig erscheint, daß die Kronen in den einzelnen Altersstufen einander geometrisch ähnliche Körper seien, dann verhalten sich ihre Oberflächen wie die Quadrate ihrer Längen.

In der nachfolgenden Tabelle wurden die Kronenoberflächen unter Zugrundelegung dieser Annahme berechnet und den Querflächenzuwachsen gegenübergestellt. Der besseren Übersicht halber wurden Kronenoberfläche und Querflächenzuwachs für das Alter 70 gleich 100 und die übrigen Zahlen mit dieser in Verhältnis gesetzt.

Tabelle 92.

I. Standortsklasse				IV. Standortsklasse			
Alter	Quer-flächen-zuwachs	Kronen-ober-fläche	Differenz	Alter	Quer-flächen-zuwachs	Kronen-ober-fläche	Differenz
70	100	100	0	70	100	100	0
100	88	114	+26	100	106	149	+43
120	75	163	+88	130	106	148	+42

Die Tabelle zeigt, daß in der ersten Standortsklasse die Kronenoberfläche um mehr als die Hälfte zunimmt, während der Querflächenzuwachs auf  $\frac{3}{4}$  seines Wertes sinkt, daß in der IV. Standortsklasse einer Zunahme der Kronenoberfläche um fast die Hälfte eine Steigerung des Querflächenzuwachses von nur 6% entspricht.

Die physiologische Erklärung Jaccards deckt sich somit nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen. Anderseits behauptet Jaccard, daß die mechanische Theorie Metzgers unzutreffend sei.

Mit Rücksicht darauf, daß er der einzige ist, der das Nichtzutreffen der Metzgerschen Theorie feststellt, sollen die von ihm angestellten Vergleiche nachgeprüft werden.

Jaccard geht bei seiner Überprüfung der Metzgerschen Theorie nicht den von Metzger eingeschlagenen Weg, die Kuben der Durchmesser durch eine Ausgleichsgerade zu verbinden, sondern er nimmt einen Teil der Kronenlängsschnittfläche als windgedrückt an, nimmt ferner die Größe des Winddruckes sowie seinen ideellen Angriffspunkt an und berechnet die Biegungsarbeiten in den einzelnen Querschnitten.

Nach der S. 27 abgeleiteten Formel ist  $d_s^3 = \frac{32 \text{ PS}}{\pi k_b}$ ; somit

$k_b = \frac{32 \text{ PS}}{\pi d_s^3}$ ; setzen wir nun mit Jaccard die wirkende Kraft P gleich einem Teil der Kronenlängsschnittfläche F mal dem Winddruck W,

dann erhalten wir  $k_b = \frac{32 FW}{\pi d_s^3}$ . Wenn der Schaft ein Träger gleichen Biegungswiderstandes ist, dann muß sich für jeden beliebigen Durchmesser  $d_s$  und seinen Abstand S vom Angriffspunkt der Kraft derselbe Wert  $k_b$  errechnen.

Tatsächlich ist  $k_b$  in keinem der von Jaccard untersuchten Fälle konstant. Aber der Schluß, den Jaccard daraus zieht, daß nämlich die Metzgersche Theorie unzutreffend sei, ist unrichtig. Unzutreffend sind vielmehr die Annahmen, auf welche Jaccard seine Berechnungen aufbaut, nämlich die willkürliche Verkleinerung des tatsächlichen Kronenlängsschnittes und die Annahme über den Angriffspunkt der biegenden Kraft, auf welche Schwierigkeiten Jaccard selbst mehrmals hinweist.

Verzichtet man auf jede Annahme, was dadurch geschieht, daß man in der bereits besprochenen Art die Kuben der Durchmesser aufträgt und durch eine Gerade ausgleicht, dann gelangt man zu wesentlich anderen Ergebnissen.

Das Zutreffen dieser Behauptung soll an den drei, von Jaccard mit allen erforderlichen Daten veröffentlichten Stämmen nachgewiesen werden.

Stamm I, Fichte aus dem Plenterwald Hasliwald, Gemeinde Opplingen, Kanton Bern (l. c. S. 246 und f.). Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Kolonne 4 enthält

**Tabelle 93.**

Berechnung nach Jaccard $d_1$	Gemessen		berechnet		$d - d_0$	h
	d	$d^3$	$d_0^3$	$d_0$		
65	75	421.000	221	60,5	+ 14,5	1
61,1	63,5	256	204	58,9	+ 4,6	3
58,5	58,8	203	187	57,2	+ 1,6	5
55,5	55,4	170	170	55,4	0	7
52,4	52,4	142	152	53,2	- 0,8	9
48,8	51,0	133	135	51,2	- 0,2	11
44,1	49,5	122	118	49,2	+ 0,4	13
38,5	46,6	101	101	46,6	0	15

die ausgeglichenen Kuben der Durchmesser, die durch geradlinige Verbindung der Kuben der gemessenen Durchmesser in 7 m und 15 m erhalten wurden.

Die Abweichungen bis 5 m sind auf das Vorhandensein eines Stammfußes zurückzuführen, der bei einem so großen und tiefbeasteten Stamm sehr weit hinaufreicht.

**Tabelle 94.**

Stamm II, große Tanne aus dem Plenterwald Hasliwald.

h	d <sub>1</sub> berechnet nach Jaccard	Gemessen		Berechnet		d—d <sub>o</sub>
		d	d <sup>3</sup>	d <sub>o</sub> <sup>3</sup>	d <sub>o</sub>	
3	68,0	68,0	315.000	314	68	0
5	62,7	65,3	278	277	65,2	+ 0,1
7	60,5	62,2	240	240	62,2	0
9	60,5	58,9	205	204	58,9	0
11	57,1	55,0	166	167	55,1	+ 0,1
13	55,6	50,7	130	130	50,7	0
15	55,0	46,4	100	93	45,3	+ 1,1
17	53,4	38,2	55,800	56	38,3	+ 0,1

**Tabelle 95.**

Stamm III, Fichte aus dem geschlossenen Bestand,  
Winterthur.

h	Gemessen		Berechnet		d—d <sub>o</sub>
	d	d <sup>3</sup>	d <sub>o</sub> <sup>3</sup>	d <sub>o</sub>	
1	46,7	102.500	59.100	39,0	+ 7,7
3	37,8	50,4	54,7	37,9	+ 0,1
5	36,7	49,5	50,4	36,9	+ 0,2
7	35,8	46,0	46,0	35,8	0
9	35,0	42,9	41,7	34,7	+ 0,3
11	33,4	37,3	37,4	33,4	0
13	32,4	34,0	33,1	32,1	+ 0,3
15	30,8	—	29,2	28,7	+ 0,2
17	29,5	—	25,6	24,3	+ 0,5
19	26,8	—	19,2	20,0	+ 0,3
21	25,0	—	15,6	15,6	0

Aus der Berechnung der drei Stämme geht unzweifelhaft hervor, daß auch sie der Metzgerschen Theorie vollkommen entsprechen, denn die in der letzten Rubrik zusammengestellten Abweichungen betragen nur wenige Millimeter.

Jaccard hat seine Theorie auf das Gleichbleiben des Querflächenzuwachses im astfreien Schaftteil gestützt. Es wurde bereits nachgewiesen, daß dieses Gleichbleiben nicht oder nur selten stattfindet.

Nun soll aber auch nach der Metzgerschen Theorie untersucht werden, wie der Querflächenzuwachs im astfreien Schaftteil verläuft.

In einem bestimmten Zeitpunkt sei  $d_s^3 = 8a_s^3S$  (S. 27). Wächst der Baum, dann wird sich der Scheitel der Parabel um  $\Delta S$  heben (Fig. 12) und die Konstante  $a_s$  sich ändern, da  $a_s = \sqrt[3]{\frac{4P}{\pi k_b}}$  (S. 27)

ist und der Winddruck  $P$  infolge Veränderung der Krone auch ein anderer geworden ist. Wir werden also nach einer Anzahl von Jahren eine Parabel von der Form  $d_s'^3 = 8a_s'^3S'$  erhalten. Setzen wir nach Fig. 12  $d_s' = d_s + \Delta d_s$  und  $S' = S + \Delta S$ , so erhalten wir  $(d_s + \Delta d_s)^3 = 8a_s'^3(S + \Delta S)^3$  oder  $d_s + \Delta d_s' = 2a_s'^3\sqrt[3]{S + \Delta S}$ , bzw.  $d_s' = 2a_s'^3\sqrt[3]{S + \Delta S}$

Diesen Durchmessern entsprechen folgende Querflächen:

$$F' = \frac{(d_s + \Delta d_s)^2}{4}\pi = [8a_s'^3(S + \Delta S)]^{\frac{2}{3}}\frac{D}{4}; F = \frac{d_s^2\pi}{4} = (8a_s^3S)^{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{4};$$

der Querflächenzuwachs im angenommenen Zeitraum beträgt

$$F' - F = [8a_s'^3(S + \Delta S)]^{\frac{2}{3}}\frac{D}{4} - (8a_s^3S)^{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{4}; F' - F = \frac{\pi}{4} \left\{ [8a_s'^3(S + \Delta S)]^{\frac{2}{3}} - [8a_s^3S]^{\frac{2}{3}} \right\} = \Delta F.$$

Für den um 1 m höher gelegenen Durchmesser  $d_1$  lautet die analoge Formel:

$$F'_1 - F_1 = \frac{\pi}{4} \left\{ 8a_s'^3(S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}} - [8a_s^3(S - 1)]^{\frac{2}{3}} \right\} = \Delta F_1.$$

Es soll nun untersucht werden, wie groß die Differenz dieser beiden um 1 m voneinander entfernten Querflächenzuwächse ist. (Nach Jaccard sollte sie Null sein.)

$$\Delta F - \Delta F_1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left\{ 4a_s^2(S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - 4a_s^2S^{\frac{2}{3}} - 4a_s'^2(S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}} + 4a_s^2(S - 1)^{\frac{2}{3}} \right\};$$

$$\Delta F - \Delta F_1 = \pi \left\{ a_s'^2 \left[ (S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - (S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}} \right] - a_s^2 \left[ S^{\frac{2}{3}} - (S - 1)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}.$$

Die Differenz der Querflächenzuwächse  $F - F_1$  ist insolange positiv, als  $a_s'^2 \left[ (S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - (S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}} \right] > a_s^2 \left[ S^{\frac{2}{3}} - (S - 1)^{\frac{2}{3}} \right]$ , sie wird Null

wenn die Werte einander gleich sind und negativ, wenn der zweite Wert größer als der erste Es besteht somit die Beziehung:

$$a_s'^2 \left[ (S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - (S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}} \right] \geq a_s^2 \left[ S^{\frac{2}{3}} - (S - 1)^{\frac{2}{3}} \right], \text{ oder wenn}$$

$$\left( \frac{a_s'}{a_s} \right)^2 \geq \frac{S^{\frac{2}{3}} - (S - 1)^{\frac{2}{3}}}{(S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - (S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}}} \text{ dann } \Delta F - \Delta F_1 > \theta.$$

Da nun jeder Teil des Nenners dieses Bruches um den gleichen Betrag  $\Delta s$  größer ist als jeder Teil des Zählers, da diese Teile durch das gleiche Vorzeichen miteinander verbunden sind und zu einer Potenz erhoben werden, die kleiner als eins ist, so muß der Wert dieses Bruches größer als eins sein.

Setzen wir nun für  $a_s' = \sqrt{\frac{4P'}{\pi k_b}}$  und  $a_s = \sqrt{\frac{4P}{\pi k_b}}$ , dann erhalten

wir  $\frac{a_s'}{a_s} = \sqrt[3]{\frac{P'}{P}}$ ; nehmen wir ferner die Kraft  $P$  proportional der gedrückten Fläche  $F$  — wobei nicht gesagt ist, daß sich diese mit der Kronenlängsschnittfläche decken muß — und diese als Fläche in einem quadratischen Verhältnis zur Kronenlänge  $k$  stehend an, dann

erhalten wir  $P' = ak'^2$ ;  $P = ak^2$  oder  $\frac{P'}{P} = \frac{k'^2}{k^2}$ . Da nun ferner die Kronenlänge gleich der Höhe  $h$  mal dem Kronenprozent  $k\%$  ist,

ergibt sich  $\frac{a_s'}{a_s} = \sqrt[3]{\frac{P'}{P}} = \left( \frac{k'\% h'}{k\% h} \right)^{\frac{4}{3}} \geq \frac{S^{\frac{2}{3}} - (S - 1)^{\frac{2}{3}}}{(S + \Delta S)^{\frac{2}{3}} - (S + \Delta S - 1)^{\frac{2}{3}}}$ ,

wenn  $\Delta F - F_1 \geq \theta$ .

Um das Zutreffen dieser Beziehung zu kontrollieren, wurden aus Guttenbergs bereits erwähntem Werk die erforderlichen Angaben entnommen, wobei zur Ermittlung von  $k\%$  infolge der knappen Angaben eine Interpolation nötig war, sowie zur Ermittlung von  $S$  die durch Jaccards Stammanalyse gestützte Annahme, daß der Schnittpunkt der dritten Potenzlinie mit der Stammachse, durch den die Größe von  $S_a$  bestimmt wird (Fig. 12) in die Kronenmitte falle.

Untersucht wurde der Normalstamm der 1. Standortsklasse im Alter von 110 bis 120 Jahren, weil bei diesem der längste astfreie Schaft vorhanden ist.

Es ergab sich für: Alter 110 Jahre,  $S = 34,8$ ,  $k\% = 42$ ; Alter 120 Jahre,  $S = 36,1$ ,  $k\% = 40$  nach obiger Formel:

$$1,0163 > 1,0155.$$

Somit müßte der Querflächenzuwachs nach oben abnehmen, was auch tatsächlich zutrifft. Er beträgt nämlich (l. c. S. 125) in 4,3 m  $72 \text{ cm}^2$ , in 19,3 m  $50 \text{ cm}^2$ , nimmt also auf 15 m Höhe um  $14 \text{ cm}^2$  ab.

Aus den angestellten Betrachtungen ergibt sich, daß von den beiden Erklärungen für die Schaftform nur die von Metzger aufgestellte den tatsächlichen Verhältnissen entspricht.

Die vorstehend, etwas eingehendere Auseinandersetzung mit der physiologischen Schaftformhypothese erschien mir notwendig, um klare Verhältnisse zu schaffen.

Außer diesen beiden Hypothesen, die sich unmittelbar auf die Schaftform beziehen, wurde von Eichhorn, Gehrhardt, Kopetzky und Weise auf empirische Weise eine Anzahl von Beziehungen zwischen der Höhe und den übrigen Massenkomponenten festgestellt, denen ebenfalls implizit eine bestimmte Stammform zugrunde liegt und über die schon S. 137 gesprochen wurde.

Nur diese Gesetzmäßigkeiten wurden, wie schon erwähnt, praktisch zur Aufstellung von Ertragstafeln herangezogen, während Metzger seine Hypothese nur verwendet hat, um in qualitativer Weise den Einfluß von Kronenänderungen auf den astfreien Stamm zu studieren. Jaccard hat nicht einmal diese Auswirkung seiner Theorie verfolgt.

Metzgers Theorie wurde nur in Schweden zu einer praktisch verwendbaren Meßmethode für stehendes Holz verwendet. Allerdings wurde sie hiebei mit einer logarithmischen Kurve gekoppelt, wodurch die strenge Gültigkeit ihres mechanischen Unterbaues wieder verloren ging.

Es ist verwunderlich, daß bei all den zahlreichen Versuchen, die Stammkurve mathematisch zu erfassen, niemals der Versuch gemacht wurde, sie aus zwei voneinander unabhängigen Kurven zusammenzusetzen, wie dies der nun schon über 60 Jahre alten Metzgerschen Hypothese entspricht.

Vielleicht befürchtete man allzu komplizierte mathematische Formeln. Aber auch das darf uns nicht abhalten, einen als richtig vermuteten Weg einzuschlagen. Schließlich ergeben sich noch immer Möglichkeiten, durch Tabellen, Kurven oder Näherungsformeln die letzten Ergebnisse in eine für die Praxis brauchbare Form umzugießen.

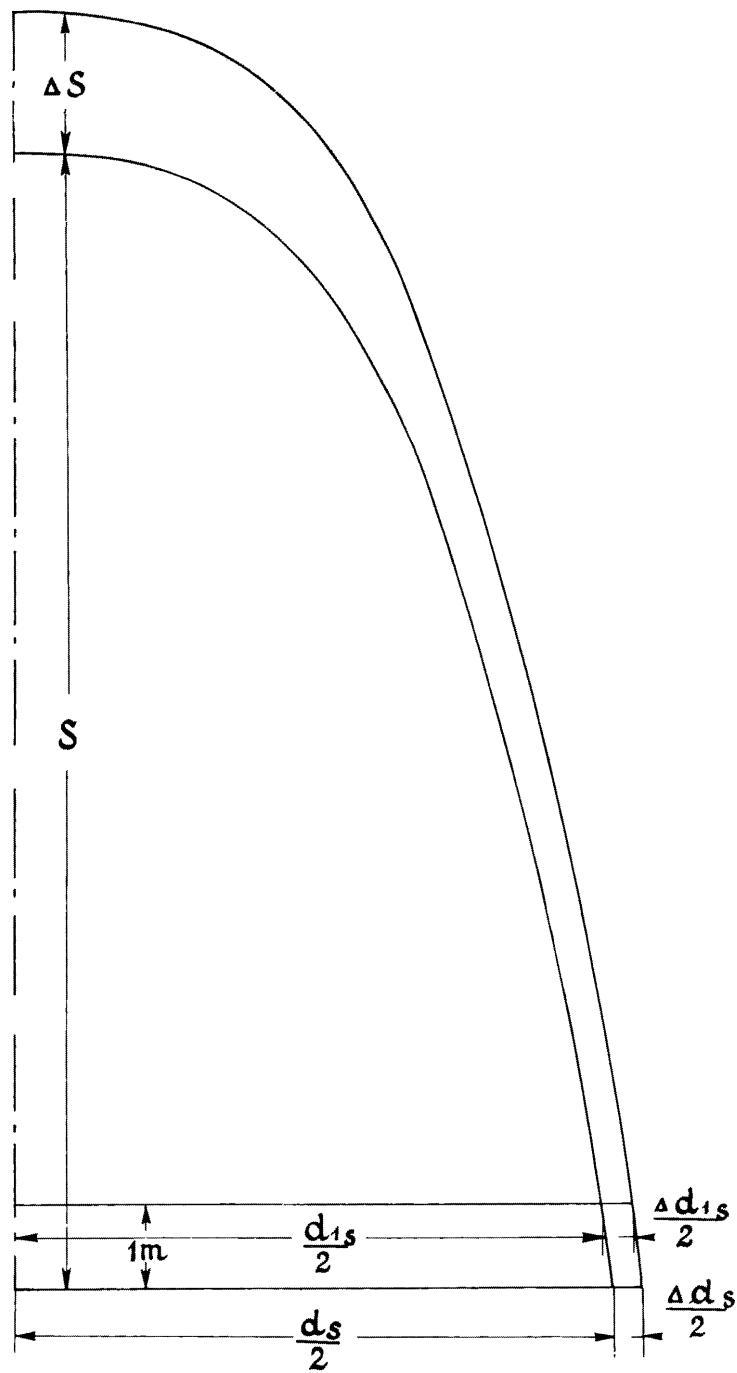


Fig. 12.

## E. SCHLUSS.

Betrachtet man ganz allgemein die Ergebnisse des vorliegenden Buches, dann fällt auf, daß diese hinsichtlich der Schaftform und der hievon abgeleiteten Folgerungen sehr viel umfangreicher sind als hinsichtlich des Zuwachsese, obwohl dieser für den Wert des Ertrages von stärkerer Bedeutung ist als die Schaftform. Der Grund hiefür liegt meines Erachtens darin, daß das grundlegende Gesetz für die Schaftform einfacher, leichter zu überprüfen und auszuwerten ist, als das für den Massenzuwachs.

Für diesen fehlen die wichtigsten Unterlagen: Die Öffnungsduer der Spalten in ihrer Abhängigkeit von Klima, Boden, Höhe und Standraum. Erst wenn diese erforscht und die Zusammenhänge zwischen der Zahl der Spalten, ihrer Öffnungsduer und Höhe über dem Boden mit dem Massenzuwachs festgestellt sein wird, erst dann besitzt auch die Zuwachsforschung jenes Fundament, das bezüglich der Stammform schon vorhanden ist. Dann erst können jene Folgerungen hinsichtlich der Bestandeserziehung in zuverlässiger Weise gezogen werden, die in diesem Buche auf Grund von Annahmen angedeutet wurden.

Und erst dann werden Betriebseinrichter und Wirtschaftsführer jene Unterlagen in die Hand bekommen, die erforderlich sind, um das Wirtschaftsziel mit Sicherheit anzugeben und mit dem größten Erfolg zu erreichen.

## F. SCHRIFFTUM.

1. Aßmann: Zur Frage der Kopetzky-Gehrhardt'schen Linien, Mitteilungen aus Forstwirtschaft und Forstwissenschaft, 7, 1936.
2. Baule: Wirkungsgesetz und Wachstumsgesetz, Landw. Jahrbuch, 59, 1924.
3. Bavink: Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften, 1949.
4. Boresch: Über Ertragsgesetze bei Pflanzen, Ergebnisse der Biologie, 4, 1928.
5. Brunn: Die Holzmassenkurve, Forstwiss. Centralbl., 52, 1931.
6. Burger: Zuwachs und Nadelmenge bei verschiedenen Föhrenrassen in Egisau, Schweizer Z. f. Forstw., 87, 1936.
7. Burger: Holz, Blattmenge und Zuwachs, Mittlg. d. Schweiz. Zentralanstalt f. d. Forstl. Vers., 19, 1936.
8. Burger: Holz, Blattmenge und Zuwachs, Mittlg. d. Schweiz. Zentralanstalt f. d. forstl. Vers., 20, 1937.
9. Burger: Blattmenge und Zuwachs an Fichten im Plenterwald, Schweiz. Zeitschr. Forstw., 89 (9), 1938.
10. Dengler: Kronengröße, Nadelmenge und Zuwachsleistung von Altkiefern, Z. f. Forst- u. Jagdwesen, 69, 1937.
11. Gerhardt: Die theoretische und praktische Bedeutung d. arithm. Mittelst. 1901.
12. Grochowski: Über Ermittlungsverfahren der Schaftform d. Waldbäume, Roczniki Nauk Rolniczych i Lesnych, 41, 1937.
13. Guttenberg: Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge, 1914.
14. Hampel: Untersuchungen über die Schaftform der Waldbäume, Centralblatt f. d. ges. Forstw., 55, 1929.
15. Hampel: Untersuchungen über die Genauigkeit der Mittenflächenformel, Centralbl. f. d. ges. Forstw., 57, 1931.
16. Hampel: Neue Untersuchungen auf dem Gebiete der Holzmeßkunde, Wiener Allg. Forst- u. Jagdztg., 49, 1931.
17. Hampel: Zur Frage der Formzahlermittlung, Wiener Allg. Forst- und Jagdztg., 52, 1934.
18. Hampel: Größe und Genauigkeit von Formzahlen, Centralbl. f. d. ges. Forstwirtschaft, 62, 1936.
19. Hampel: Die Genauigkeit von Formeln zur Messung liegenden Holzes, Centralbl. f. d. ges. Forstwirtschaft, 66, 1940.
20. Hampel: Eine Zuwachshypothese auf physiologischer Grundlage, Centralbl. f. d. ges. Forst- und Holzwirtschaft, 71, 1951.
21. Hohenadl: Der Aufbau der Baumschäfte, Forstwiss. Zentralbl., 11, 1924.
22. Hohenadl: Die Bestandsmessung, Forstwiss. Zentralbl., 58, 1936.
23. Huber: Zur Physik der Spaltöffnungstranspiration, Ber. d. Deutsch. Bot. Ges., Bd. XLVI.
24. Hudeczek: A. Mathiesen, Die Schwerpunktsmethode bei der Holzmassenermittlung, Zentralbl. f. d. ges. Forstw., 57, 1931.

25. Jaccard: Eine neue Auffassung über die Ursache des Dickenwachstums, Naturwiss. Zeitschr. f. L. u. Fw., 11, 1913.
26. Janisch: Das Exponentialgesetz als Grundlage einer vergleichenden Biologie, Berlin 1937.
27. Janka: Untersuchungen über die Elastizität und Festigkeit der österreichischen Bauhölzer. Mitteilungen aus d. forstl. Versuchsw. Österr. 25, 28, 35, 37, 40.
28. Jonson: Das Schaftproblem, Mitteilungen aus d. forstl. Versw. Schwedens 23, 1926/27.
29. Koberg: Zur Ableitung der Gestalt der Fichte aus ihrer Windbeanspruchung, Thar, forstl. Jahrbuch, 87, 1936.
30. Koller: Analytische Untersuchungen über die Zuwachskurven, Österr. Vierteljahrsschr. f. Forstw., 1886.
31. Korsuň: Das Leben des normalen Bestandes in Formeln, Lesnicka prace, 14, 1935.
32. Kunze: Neue Methode zur raschen Berechnung der unechten Schaftformzahl der Fichte und Kiefer, 1891.
33. Leon: Technik u. Naturwissenschaft, Zentralbl. f. d. ges. Forstw., 1915.
34. Levakovič: Analytische Form des Wachstumsgesetzes, Glasnica za sumske pokuse, 4, 1935.
35. Levakovič: Analytischer Ausdruck für die Höhenkurve, Glasnica za sumske pokuse, 4, 1935.
36. Levakovič: Physiologisch-dynamische Grundlagen der Wachstumsfunktionen, Glasnica za sumske pokuse, 6, 1939.
37. Levakovič: Methode zur beschleunigten Berechnung der Parameter für einige neue Wachstumsfunktionen, Sumarski List, 63, 1939.
38. Macdonald: Die Stammform bei Nadelhölzern, Forestry, 7, 1933.
39. Metzger: Der Wind als maßgebender Faktor für das Wachstum der Bäume, Mündener forstl. Hefte, 3, 1893.
40. Metzger: Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statischen Gesetzen, Mündener forstl. Hefte, 5, 6, 7; 1894/95.
41. Metzger: Form und Wachstum der Waldbäume im Lichte der Darwinschen Lehre, Allg. Forst- und Jagdztg., 72, 1896.
42. Michailoff: Untersuchungen über die Genauigkeit der Mittenflächenformel (Hubers Formel) bei der Inhaltsermittlung von Nadelholzschäften, Jahrb. d. Univ. Sofia, 15, 1937.
43. Michailoff: Über die Genauigkeit der Hoßfeldformel, Lessowodska missall, 1, 1937.
44. Müller: Lehrbuch der Holzmeßkunde, 1923.
45. Näslund: Kubierungstabellen für Kiefer, Sv. Skogsv, Tidskr., 32, 1934.
46. Peschel: Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstumsge setze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung, Thar, forstl. Jahrbuch, 1938.
47. Petrini: Eine Näherungsformel für Stammkubierung, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Schwedens, 24, 1938.
48. Petrini: Die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Schwedens, 1927/28.
49. Petrini: Formeln für Stammkubierung, Thar, forstl. Jahrbuch, 77, 1926.
50. Pettersson: Studien über die Stammform, Mittlg. a. d. forstl. Vers. Schwedens, 23, 1926/27.
51. Rippel: Wachstumsgesetze bei höheren und niederen Pflanzen, 1925.
52. Rippel: Das Ertragsgesetz, in: F. Honekamp, Handb. f. Pflanzenern. u. Düngung, Springer, Berlin 1931.

53. Simony: Die näherungsweise Flächen- und Körperberechnung in der wissenschaftl. Holzmeßkunde, 1901.
  54. Sirakoff: Inhaltsermittlung von Weißkiefernschäften aus zwei Durchmessern und Höhe (Länge), Thar, forstl. Jahrbuch, 89, 1938.
  55. Schiffel: Form und Inhalt der Fichte, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Österr., XXIV, 1899.
  56. Schiffel: Kubierung von Rundholz aus zwei Durchmessern und der Länge, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Österr., XXVII, 1902.
  57. Schiffel: Wuchsgesetze normaler Fichtenbestände, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Österreichs, XXIV, 1904.
  58. Tiren, Einige Untersuchungen über die Schaftform, Mitteilg. a. d. forstl. Versuchswesen Schwedens, 24, 1928.
  59. Tiren: To the Question of Tapering and Volume Calculation of Pine Trunks, Mittlg. a. d. forstl. Versw. Schwedens, 24, 1928.
  60. Tischendorf: Gesetzmäßigkeit des Höhen- und Massenzuwachses unserer Nadelhölzer während ihrer Vollkraft, Zentralbl. f. d. ges. Forstw., 1925.
  61. Tischendorf: Wuchsgesetze von *Pinus silvestris*, Forstwiss. Zentralbl., 1926.
  62. Tischendorf: Unsere Kenntnis über den Verlauf der Schaftkurven, Wiener Allg. Forst- u. Jagdztg., 50, 1932.
  63. Tretiakow: Die Bestimmung des Bauminhaltes mit Hilfe von drei Messungen, Petersburg 1915.
  64. Vanselow: Forstliche Zuwachs- u. Ertragslehre, 1942.
  65. Windirsch: Der Aufbau des Waldbaumes nach statischer Grundlage, Thar, Forstl. Jahrb., 87, 1936.
-

## NADEL- UND LAUBHOLZSAMEN

FORSTPFLANZEN  
liefert in bester Qualität  
KLENGANSTALT FÜR FORTSAMEN

FRANZ KLUGER, Wien II,  
Obere Augartenstraße 18  
Telephon A 43 0 92  
Preisliste auf Verlangen



ANNONCEN-MENCLIK  
WIEN I, SCHULERSTRASSE 19  
R 29-0-37 R 23-0-70

INSERATE für alle Zeitungen und Zeitschriften zu Originalpreisen!  
Kostenlose Beratung in allen Werbeangelegenheiten!  
Plakate - Rundfunk - Film  
Telegrammadresse: Werbemenclik — Fernschreiber: 01/1016

Zur Mischwaldaufforstung  
ROT- UND WEISSBUCHENSETZLINGE UND HEISTER  
(Größen 15—200 cm)

Kanad-Pappeln, Fichtensämlingspflanzen, 2 jährig aufforstbare Schwarzkieferpflanzen liefert jede Menge sehr preiswert  
JOSEF LAYER, HOLLENSTEIN/YBBS, N. Ö.

Lignal

schützt Holz vor  
FÄULNIS u.  
FRASS

ÖSTERREICHISCHE  
HOLZSCHUTZGESELLSCHAFT m.b.H. GRAZ-WIEN

GRAZ, MÜNZGRABENSTRASSE 100  
WIEN I, DR. KARL LUEGERRING 6