FORSTLICHE BESTANDESÜBERGÄNGE ALS STOCHASTISCHE PROZESSE IV

Bestimmung der Koeffizienten bei der Gleichung für Bestandesübergänge

von
T. Suzuki
Universität Nagoja, Japan

1. Zusammenfassung

Die Koeffizienten der Kolmogorow Gleichung, welche den zweidimensionalen Bestandesübergang bestimmen, habe ich nur als Funktion der Altersklasse τ festgelegt. Waren bisher die Wachstumsgeschwindigkeit von Durchmesser und Baumhöhe sowie die Zunahme der Varianz gemäß dem Mitscherlichschen Gesetz angenommen worden, so konnte diesmal das Gesetz für die Zunahme der Kovarianz von Durchmesser und Baumhöhe neu definiert werden. In der Folge ergab sich eine Gleichung für den zweidimensionalen Bestandesübergang, wofür die Grundlösung eine annehmbare Form besitzt und als zweidimensionale Normalverteilung bestimmt werden konnte.

2. Vorbemerkung

Im vorhergehenden Bericht III kam auch die Bacherliersche Gleichung für Bestandesübergänge vor

(1) $$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_{1,1}(\tau)\psi) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\alpha_{1,2}(\tau)\psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha_{2,2}(\tau)\psi) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\beta_1(\tau)\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_2(\tau)\psi) \right\}$$

wobei der Teil für das Absterben eliminiert wurde; des weiteren konnte als Grundlösung dafür dargelegt werden:

(2) $$\psi(\tau; x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_x \sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q(x,y) \right\}$$

(3) $$Q(x,y) = \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}$$

Die Gleichung (1), aber auch die Lösung (2) mit (3) ergeben sich als Folge davon, daß die verschiedenen Größen, wie $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ oder ρ, alle nur als Funktionen von τ bestimmt werden. Dieser Bericht will eine theoretische Untersuchung über die Gestalt dieser Koeffizientenfunktionen sein.

3. Durchmesser- und Höhenwachstum des Forstbestandes und deren Wachstumsschwankungen

Im vorhergehenden Bericht I habe ich gezeigt, wie daß Wachstum des mittleren Durchmessers μ_x eines Baumes im Bestand dem Mitscherlichschen Gesetz

(4) $$\frac{d\mu_x}{d\tau} = k(M - \mu_x)$$

folgt, und weiter auch, daß es statthaft ist, für das Wachstum eines Einzelbaumes eine Überlagerung vom mittleren Durchschnittswachstum und von der zufälligen veränderlichen Zeitreihe $f(\tau)$ anzunehmen, woraus

(5) $$\frac{dx}{d\tau} = k(M - x) + f(\tau)$$

folgt. Hier ergibt die Lösung der Gleichung (4)

(6) $$\mu_x = M(1 - e^{-k\tau})$$

und ferner die Lösung der Gleichung (5)

(7) $$x = \mu_x + e^{-k\tau}\int_0^\tau e^{ku} f(u)\,du$$

Da hier auch die Annahme besteht, daß der Mittelwert der Wachstumsschwankung $f(u)$ null beträgt, entbehrt die Gleichung nicht der Allgemeingültigkeit.

Wenn man auf dieselbe Weise auch für das Baumhöhenwachstum das Mitscherlichsche Gesetz zur Anwendung bringt, ergibt sich für die mittlere Baumhöhe μ_y wie für die Höhe y des Einzelbaums

(8) $$\mu_y = N(1 - e^{-l\tau})$$ und

(9) $$y = \mu_y + e^{-l\tau}\int_0^\tau e^{lv} g(v)\,dv$$

Auch hier besteht die Annahme, daß der Mittelwert der Wachstumsschwankung $g(v)$ null beträgt.

4 Durchmesser- und Baumhöhenwachstum und dessen Varianz

Von der Gleichung (7) beziehungsweise der Gleichung (9) aus kann man die Wachstumsschwankungen $x-\mu_x$ beziehungsweise $y-\mu_y$ für den Durchmesser eines Einzelbaums beziehungsweise für die Höhe desselben finden, und wenn man das quadriert und davon das Mittel zieht, auch die jeweilge Varianz. Wenn man von beiden das Produkt bildet und davon das Mittel zieht, erhält man die Kreuzkovarianz von Durchmesser und Baumhöhe. Das ergibt dann

(10) $\sigma_x^2 = E((x-\mu_x)^2) = e^{-2aT} E\left(\int_0^T e^{au} f(u)\,du\right)^2$,

(11) $\sigma_y^2 = E((y-\mu_y)^2) = e^{-2bT} E\left(\int_0^T e^{bv} g(v)\,dv\right)^2$ und

(12) $\rho\sigma_x\sigma_y = E((x-\mu_x)(y-\mu_y))$
$= e^{-(a+b)T} E\left(\int_0^T e^{au} f(u)\,du \int_0^T e^{bv} g(v)\,dv\right)$

Bezüglich der Aufstellung der Gleichungen (10) und (11) habe ich schon in meinem früheren Aufsatz I berichtet, und auch die Gleichung (12) kann auf ungefähr dieselbe Art aufgestellt werden. Im folgende[n] will ich die Erstellung dieser Gleichung erklären.

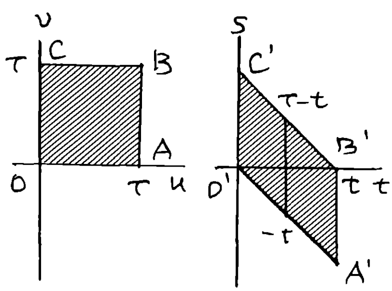
Wenn man zuerst bei der Gleichung (12) die Reihenfolge der Mittelwertberechnung und der Integralberechnung umkehrt, erhält man

(13) $$E\left(\int_0^T e^{au} f(u)\,du \int_0^T e^{bv} g(v)\,dv\right) = \int_0^T \int_0^T e^{au+bv} E(f(u)g(v))\,du\,dv$$

Nimmt man hierbei für die Integralvariablen den Austausch

(14) $$u = t \,, \qquad v = t + s$$

vor, verändert sich der Integralbereich, wie die Skizze zeigt.



Weil die Funktionaldeterminante des Variablenaustausches 1 beträgt, ergibt sich

(15) $$\int_0^T \int_0^T e^{au} e^{bv} E(f(u)g(v))\,du\,dv = \int_0^T e^{at}\,dt \int_{-t}^{T-t} e^{b(t+s)} E(f(t)g(t+s))\,ds$$

Hier ist $E(f(t)\,g(t+s))$ die Kreuzkovarianz der zufälligen Zeitreihen $f(t)$ und $g(t)$, und wenn man deshalb die Varianzen der betreffenden Zeitreihen als $\overline{f^2}$ und $\overline{g^2}$ anschreibt, weiter die Kreuzkorrelationskoeffizienten und als $\gamma_{f,g}(s)$, so erhält man

(16) $$E(f(t)\,g(t+s)) = \sqrt{\overline{f^2}}\sqrt{\overline{g^2}}\;\gamma_{f,g}(s)$$ und daraus

(17) $$E((x-\mu_x)(y-\mu_y))$$
$$= e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\sqrt{\overline{f^2}}\sqrt{\overline{g^2}}\int_0^T dt\int_{-t}^{T-t} e^{(\alpha_1+\alpha_2)t+s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds$$

$\gamma_{f,g}(s)$ im Integral auf der rechten Seite der Gleichung (17) ist gemäß Definition der Kreuzkorrelationskoeffizient für die Wachstumsschwankungen des Durchmessers und der Baumhöhe bei einem einzelnen Baum, weshalb s nur bei einem kleinen Intervall von $(0,\varepsilon)$ endliche Werte annimmt. Da man nun für den Bereich außerhalb davon voraussetzen kann, daß $\gamma_{f,g}(s)$ rasch gegen null konvergiert, ergibt sich

(18) $$\int_0^{T-t} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds \doteq \int_0^{\varepsilon} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds$$

sowie für das Interval $(0,\varepsilon)$

(19) $$e^{\alpha_2 s} \doteq 1$$

woraus einsichtig wird, daß

(20) $$\int_0^{T-t} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds \doteq \int_0^{\varepsilon} \gamma_{f,g}(s)\,ds$$

Weil weiterhin für das Intervall von (ε,∞) gilt,

(21) $$\gamma_{f,g}(s) \doteq 0$$

steht dem Ausdruck

(22) $$\int_0^{T-t} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds \doteq \int_0^{\infty} \gamma_{f,g}(s)\,ds$$

nichts entgegen.

Gilt weiter die Annahme, daß

(23) $$\gamma_{f,g}(-s) = \gamma_{g,f}(s)$$

dann ergibt sich

(24) $$\int_{-t}^{0} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds = \int_0^{t} e^{-\alpha_2 s}\,\gamma_{g,f}(s)\,ds$$

was nach der gleichen Berechnungsweise wie oben zu

(25) $$\int_{-t}^{0} e^{\alpha_2 s}\,\gamma_{f,g}(s)\,ds \doteq \int_0^{\infty} \gamma_{f,g}(s)\,ds$$

wird.

Die Integrale der Gleichungen (22) und (25) sind Konstanten von einer einzigen Zeitreihe, und wenn man das bei der Gleichung

(17) zur Anwendung bringt, erhält man

(26) $$E((x-\mu_x)(y-\mu_y)) \doteq const\, e^{-(R+R)\tau} \int_0^{\tau} e^{(R+R)t}\, dt = const\,(1-e^{-(R+R)\tau})$$

Das wäre der theoretische Ausdruck der Kreuzkovarianz zur Wachstumsschwankung von Durchmesser und Baumhöhe.

Um die obige Berechnungsweise für die Berechnung der Durchmesservarianz beziehungsweise der Baumhöhenvarianz anwenden zu können, kann man oben die Kreuzkorrelationsfunktion $\gamma_{f,g}(s)$ zur entsprechenden Autokorrelationsfunktion $\gamma_{f,f}(s)$ beziehungsweise $\gamma_{g,g}(s)$ machen.

Das Ergebnis wäre

(27) $$\sigma_x^2 = E((x-\mu_x)^2) = const\,(1-e^{-2R\tau})$$ beziehungsweise

(28) $$\sigma_y^2 = E((y-\mu_y)^2) = const\,(1-e^{-2R\tau})$$

5 Die Koeffizientenfunktion der Gleichung für Bestandesübergänge und ihre Grundlösung

Von einem Bestand sind oben die mittlere Baumhöhe, der mittlere Durchmesser, die Baumhöhenvarianz, die Durchmesservarianz sowie die Kovarianz von Baumhöhe und Durchmesser alle nur als Funktionen der Altersklasse τ bestimmt worden. Wenn man dieselben deshalb nach der Altersklasse τ differenziert, kann man alle Koeffizientenfunktionen der Gleichung (1) bestimmen. Man erhält:

(29) $$\alpha_{1,1}(\tau) = d\sigma_x^2/d\tau = const\, e^{-2R\tau}$$

(30) $$\alpha_{1,2}(\tau) = d\rho\sigma_x\sigma_y/d\tau = const\, e^{-(R+R)\tau},$$

(31) $$\alpha_{2,2}(\tau) = d\sigma_y^2/d\tau = const\, e^{-2R\tau}$$

(32) $$\beta_1(\tau) = d\mu_x/d\tau = const\, e^{-R\tau}$$ und

(33) $$\beta_2(\tau) = d\mu_y/d\tau = const\, e^{-R\tau}$$

Um für diese wieder die Grundlösung zu erhalten, muß man Gleichungen wie (6),(8),(26),(27) und (28) in die Gleichungen (2) und (3) einsetzen.

6 Überlegungen zur Grundlösung

Die Grundlösung von Gleichung (2) und (3), welche die Verteilungen von Baumhöhe und Durchmesser im Bestand darstellen, sind zweidimensionale Normalverteilungen mit dem Mittel (μ_x, μ_y), den Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 und der Kovarianz $\rho\sigma_x\sigma_y$, und diese

Variablen sind alle zunehmende Funktionen der Altersklasse τ Diese bezeichnen somit das Wachstum des Bestandes.

Wenn man bei dieser Gelegenheit bei den Gleichungen (6) und (8) das Alter τ eliminiert, erhält man

(34) $$(1-\mu_x/M)^{h} = (1-\mu_y/N)^{k}$$ beziehungsweise

(35) $$\mu_y = N\{1-(1-\mu_x/M)^{h/k}\}$$

und hat für die verschiedenen Altersklassen im Forstbestand die mittlere Baumhöhenkurve, die sich asymptotisch dem Maximum N nähert und überdies eine konvexe Kurve darstellt. Weil aber bei den Bäumen eines einheitlichen Bestandes mit bestimmter Altersklasse die zweidimensionale Verteilung für die gleichen Wahrscheinlichkeitsdichten eine elliptische Kurve besitzt, ist ihre Baumhöhenkurve eine Gerade, deren Regressionskoeffizient

(36) $$a = \rho\sigma_y/\sigma_x$$

ist. Die Baumhöhenkurve für eine einheitliche Forstabteilung kann als eine angenäherte Gerade aufgefaßt werden, eine Tatsache, die man in der Wirklichkeit ja häufig beobachten kann, was aber nicht mit der obenerwähnten mittleren Baumhöhenkurve verwechselt werden darf. Wendet man die Gleichung (26), (27) und (28) an, ergibt sich in Bezug auf einen Bestand von einheitlichem Alter als Korrelationskoeffizient für Baumhöhe und Baumdurchmesser

(37) $$\rho = \mathrm{const}\{1-e^{-(h+k)\tau}\}/\sqrt{1-e^{-2h\tau}}\sqrt{1-e^{-2k\tau}}$$

Entwickelt man hierbei für ρ die Potenzreihen $e^{-h\tau}$ und $e^{-k\tau}$, ergibt sich

(38) $$\rho = \mathrm{const}\{1+\tfrac{1}{2}(e^{-h\tau}-e^{-k\tau})^2+ \qquad \}$$

Nimmt man dabei τ genügend groß an und faßt dazu noch h und k annäherend gleich auf, wird ersichtlich, daß

(39) $$\rho \doteq \mathrm{const}$$

wodurch man freilich auch die Tatsache feststellen kann, daß für einen Wald mit den obenerwähnten Bestandesabteilungen der Korrelationskoeffizient von Baumhöhe und Baumdurchmesser annäherend konstant wird.

Summary

In the previous paper was derived a kind of Kolmogorov equation representing a two dimensional forest transition. This paper aims to determine the coefficients of the equation as function of the forest age τ Assuming that the growth ratio of tree diameter and of tree height obey to the Mitscherlich's law, the variances of both factors and their cross covariance are specified. In conclusion the two dimensional forest transition equation is completely defined and its fundamental solution is obtained in a very reasonable form.

7 Zitierte Literatur

SUZUKI T., 1967: *Kakuritukatei to site no rinbun no sen'i* (II)
Forstliche Bestandesübergänge als stochstische Prozesse (II)
Nitirinsi (Zeitschrift der Japanischen Gesellschaft für Forstwissenschaft) 49, S 17-19

DERSELBE 1971: Forest transition as a stochastic process (I)
Mitt. der Forstl. Bundes-Versuchsanstalt, Wien 91, S 69-86

SWEDA T. / Umemura T.: A Theoretical Height- diameter curve (I)
Nitirinsi (w.o.) 62, S 459-464 1980

TANAKA K., 1981: Changes of the coefficient of correlation between D.B.H. and height in a forest stand (in Japanese)
Nitirinsi (w.o.) 63, S 331-334