

## WIEDERGABE DER BAUMSCHAFTFORM

*Branislav SLOBODA*

### SUMMARY

Bitterlich's method of smoothness in correspondence with the reproduction of the stem form is discussed. The Spline interpolation, minimizing the total curvature, complies with the Bitterlich interpolation (which is empirically carried out with aid of a steel wire) (1.2.3) ROESNER (1973) and SLOBODA (1975) give an algorithm for the Spline function; the closeness of fit is represented by (1.2.4). Possible applications are given: 2.0 and 3.0 are exemplary, whereas illustrations 3a, 3b, 4a through 4e are directly displayed on the stem. Illus. 3a + 3b represent the Bitterlich verification of the goal of fit. The practicality of this method is apparent in 3.0, indicating a connection with the total stem method of SCHÖPFER (1976).

### 1.0 Einführung

Im Zuge der Rationalisierung der Holzvermessung und Sortimentierung der Rohstämme mit Hilfe der EDV wird die formale Nachahmung der individuellen Schaftform anhand einer "minimalen" Anzahl der Meßgrößen von großer Bedeutung. Mit Hilfe der Schaftfunktion können in dem Computer komfortable Holzlisten erstellt werden, die außer der Sortimentierung der "Rohstämme" auch weitreichende Informationen zur Optimierung der finalen "Sägerausbeute" ermöglichen. Im wesentlichen handelt es sich hier um das sogenannte erweiterte Rohschaftverfahren (SCHÖPFER, 1976). Im Rahmen der Grundlagenbeschaffung für dieses Projekt entstand die Alternative der Schaftformerfassung, die in der sogenannten Bitterlich'schen Interpolationsmethode eingebettet werden kann. (BITTERLICH, 1961) Der Bitterlich'schen Interpolierenden liegen die mathematischen Modelle der Splinefunktionen am nächsten. Die Bitterlich'sche Interpolierende (im weiteren kurz B.I.) läßt sich für einen Stamm wie folgt konstruieren:

- Rohstamm wird sektionsweise vermessen (äquidistante Aufteilung ist nicht notwendig). Man erhält die Stützstellen  $(x_i, y_i)$ ;  $i=1, \dots, N+1$ .
- Die Stützstellen der Sektionierung stellen wir uns als "Nadeln" der Länge  $y_i$  vor, die in der Entfernung  $x_i$  von  $(0,0)$  stehen (Abb. 1).
- Durch die "Nadelöhre" ziehen wir einen elastischen Stahldraht und dessen Verlauf wollen wir mit der B.I. identifizieren (Abb.1).

### 1.1 Eigenschaften von B.I.

1. B.I. glättet den Verlauf ("B.I. gewährleistet die Stetigkeit der Ableitungen entlang der Schaftform").
2. Die Koinzidenz des Verlaufs von B.I. und die "reale" Form aus den Stützstellen  $(x_i, y_i)$ ;  $i=1, \dots, N+1$  ist gewährleistet.
3. Eine vernünftige Interpolation zwischen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  ist wegen des B.I.-ähnlichen Verhaltens der realen Form naheliegend.
4. B.I. ist auch für den Praktiker ohne mathematische und EDV-Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar, wodurch wichtige Verarbeitungsgrundlagen, die intern im Computer erarbeitet werden, transparenter und "glaubwürdiger" erscheinen.

#### Bemerkung 1.1.1:

Hätte man zum physikalischen System (oder Meßgerät der Stamformerfassung) "Bitterlich'scher Rektifizierungsdraht" ein mathematisches Beschreibungsmodell zur Verfügung, so würde man der B.I. vor den herkömmlichen Verfahren der Wiedergabe, wie z.B.

- α) Glättung durch Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate
- β) Glättung durch Newton'sche oder Lagrange'sche Interpolation
- γ) Lineare Interpolation

den Vorrang geben. Die unter α) und β) eingeordneten Verfahren bringen gewisse unkontrollierbare Effekte mit sich, indem einer der Punkte 1., 2., 3., 4. verletzt wird. Die lineare Interpolation liefert trotz ihrer Einfachheit auch bei "feinerer" Sektionierung systematische Fehler (Unterlaufen bzw. Überlaufen).

Bemerkung 1.1.2.1:

Es ist naheliegend, daß B.I. eine Interpolierende mit minimalen "globalen" Krümmungen für die Stützstellen erzeugt, wodurch "wilde" Verläufe (wie z.B. bei ) zwischen Stützstellen ausgeschaltet werden. Ohne näher auf die physikalischen Sachverhalte einzugehen stellen wir fest, daß die sog. "Natürlichen kubischen Splinefunktionen" der B.I. am nächsten kommen und im wesentlichen das gleiche Phänomen beschreiben. Das System in Abb. 2 zeigt die Koppelung der Komponente Schaftform, Physikalisches System - elastischer Draht, Splinefunktionen, EDV-System. Somit kann ein Meßinstrument für die Ermittlung des Wertes und des optimalen Verschnitts des Stammes definiert werden (Abb. 2).

Natürliche kubische Splinefunktionen

Gegeben sind: Stützstellen der Schaftform  $(x_k, y_k)$ ;  $k=1, \dots, N+1$

(Es bieten sich jeweils 4 Punkte an, um ein kubisches Polynom zu konstruieren,  $(x_k, y_k)$ ;  $k=i-1, i, i+1, i+2$ ;  $i=2, 3, \dots, N-1$  das aber nur für das Intervall  $[x_k, y_k]$  benutzt wird. Dann werden diese niedriggradigen (schwach schwankenden) Polynome zu einer in  $[0, L]$  möglichst oft differenzierbaren Funktion ineinandergefügt, die gleichzeitig Interpolierende ist).

Def. 1.2.1

Die Funktion  $s(x)$  wird genau dann ein natürlicher kubischer Spline ( B.I.) genannt, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- a)  $s(x) \in C_2 [0, L]$  , ( $s(x)$  ist zweimal stetig differenzierbar in  $0, L$ )
- b)  $s(x_i) = y_i$   $y(x_i)$  für  $i=1, \dots, N+1$ ; ( $s(x)$  läuft durch die Stützstellen)
- c)  $s(x)$  ist ein Polynom 3. Grades in jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$
- d)  $s''(x_1) = s''(x_{N+1}) = 0$  (Wendepunkteforderung in  $x_1 = 0$ ; und  $x_{N+1} = L$ )

Bemerkung 1.2.1:

In der praktischen Analysis beweist man, daß a), b), c), d) die gesuchte Spline-Funktion eindeutig definieren und auch entsprechenden Algorithmus liefern. Im weiteren wird angenommen, daß auch die "Schaftform"  $y(x)$  die Bedingung  $y(x) \in C_2 [0, L]$  erfüllt. Schließlich erhält man nach diesen Algorithmen (siehe ROESNER,

1973, SLOBODA, 1975) für jedes Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$  die Funktion  $s_i(x)$  mit

$$(1.2.1) \quad s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i; \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Diese Splinefunktion  $s(x)$  gemäß Def. 1.2.1 läßt sich kompakter schreiben

$$(1.2.2) \quad s(x) = \sum_{i=1}^N s_i(x) \cdot I_i(x); \quad I_i(x) = \begin{cases} 1; & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

### Bemerkung 1.2.2:

Sei  $h = \max_{1 \leq i \leq N} \|(x_{i+1}, x_i)\|$  (die Norm der Sektionierung)

und  $g(x) \in C_2[0, L]$  eine andere Interpolierende bezüglich der gleichen Stützstellen wie  $s(x)$  gemäß (1.2.2) gegeben, so gelten folgende Ungleichungen

$$(1.2.3) \quad \int_0^L [g''(x)]^2 dx \geq \int_0^L [s''(x)]^2 dx; \quad (\text{minimale "globale" Krümmung})$$

$$(1.2.4) \quad \max_{0 \leq x \leq L} |y(x) - s(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left\{ \int_0^L |y''(x)| dx \right\} \quad (\text{Abschätzung der Güte der Wiedergabe von } y(x) \text{ durch } s(x))$$

Diese Ungleichungen dokumentieren im wesentlichen die Ähnlichkeit des Verhaltens von  $s(x)$  mit B.I.

## 2.0 Konkrete Anwendung

### Beispiel 2.0.1:

In Abb. 3a) sind die Stützstellen eines sektionierten Stammes als Punkte dargestellt. Fixieren wir die Stützstellen A, B, C, D mit Stecknadeln und legen durch diese reduzierte Anzahl die B.I. fest. Diese Linie wird gemäß (1.2.3) etwa dem Verlauf des durch die Punkte A, B, C, D, E festgelegten Spline entsprechen. Diese Festlegung entspricht kaum dem Verlauf der sektionsweise vermessenen Schaftkurve. Die Abb. 3b) zeigt die gleiche Situation wie Abb. 3a), aber zusätzlich kommt hier noch eine Stützstelle L hinzu. Die Stützstelle L wurde empirisch derart fixiert, daß der durch die Stützstellen A, B, C, D, E festgelegte Verlauf der B.I. (des

Stahlstreifens) "minimale" Abweichungen von den übrigen realen Stützstellen aufweist. Die Position liegt bei diesem Stamm in der Nähe von  $x = 6$  m.

### Verifizierung durch Simulation mit Spline

Die Abbildungen 4a - 4e zeigen im Prinzip die gleiche Vorgehensweise (auf dem gleichen Stamm), wobei die Funktion des Stahlblattes von seiner mathematischen Idealisierung, d.h. von der Splinekurve übernommen wird. Die schwächere Linie gibt den geglätteten "wahren" Stamm wieder und die Positionierung von A, B, C, D, E ist die gleiche wie in 3a und 3b. Die stärkere Linie stellt jeweils den durch die Punkte A, B, C, L, D, E fixierten (gemäß Def. 1.2.1 errechneten) Spline. Hier zeigt sich die Fixierung des "Läufers" L bei  $x = 6$  m ebenfalls als optimale Variante (Abb. 4b). Liegt "Läufer" L links oder rechts von der Position  $x = 6$  m, wird die Verschlechterung der Wiedergabe ersichtlich. Die Tendenz der jeweiligen Diskrepanz sowie der Robustheit der Lage  $x = 6$  m läßt sich aus Abb. 4a) bis 4e) entnehmen.

### 3.0 Folgerungen für die Praxis

Die Frage hier lautet: Wieviele und welche Meßwerte am Stamm zu nehmen sind, um dieses Verfahren praxisnah zu machen.

Voraussetzung: 1. Es liegt ein Rohschaft wie in Abb. 5 vor

Voraussetzung: 2. Gemessen wurde die Länge L und  $D_{0.15L}$  sowie der Zopfdurchmesser  $D_z$  und die Zopflänge  $L_z$

(Diese Voraussetzungen sind in der Praxis üblicherweise erfüllt. Zum Unterschied wird hier nicht der Mittendurchmesser  $D_{0.5L}$  sondern der Durchmesser des Schaftes in 0.15 L m vom Fuß entfernt gemessen. Die Höhe 0.15 L entspricht etwa der optimalen Lage des Läufers L).

Somit liegen die Stützstellen L, D, E vor. Die Stützstellen A, B, C werden im Interesse der besseren Wiedergabe des Schaftes im unteren Bereich wie folgt geschätzt:

(3.0.1)

$A \sim (0; 0.15 \cdot D_{0.15L})$ ;  $B \sim (0.030 \cdot L; 1.13 \cdot D_{0.15L})$ ;  $C \sim (0.05 \cdot L; 1.07 \cdot D_{0.15L})$

Somit liegen alle notwendigen Elemente zur geschilderten Anpassung vor. An dieser Stelle empfehle ich die "beste" Lage von A, B, C, L für einzelne Baumarten und charakteristische Wuchsgebiete zu ermitteln und mit dieser dann konkret die B.I. zu konstruieren. Meine Festlegung von A, B, C, L (siehe 3.0.1) habe ich anhand von 10 zufällig ausgewählten Baumformen aus GUTENBERG (1915) untersucht und diese Positionierung führt hier zu befriedigenden Ergebnissen.

Dieses Beispiel soll die empirische Funktionsweise von Spline verdeutlichen und zeigen, daß auch komplizierte und rechenintensive Beschreibungsmittel wie Schaftfunktionen, die erst im Computer erarbeitet werden, auch für den Praktiker, der letztlich diese Hilfsmittel beurteilen und annehmen muß, verifizierbar sein können. Solche physikalische Verifizierbarkeit trägt unter anderem zur Transparenz der "Schaftkurvenanpassung anhand weniger Meßwerte" und schließlich zur Transparenz EDV-interner Sortimentierung und Bewertung der Stämme bei. (Hierzu siehe SCHÖPFER, 1976). Die Berechnung der entsprechenden Splinefunktionen und ihre graphische Darstellung erfolgte mit der Standardroutine SMOTH aus dem Software-System PLOT auf der Rechenanlage UNIVAC-1106 des Rechenzentrums der Universität Freiburg.

#### LITERATURHINWEISE

- |                 |      |  |
|-----------------|------|--|
| BITTERLICH, W.: | 1961 | Das Biegelinien- und Ausgleichs- und Interpolationsgerät, <u>Patentanmeldung</u> Salzburg  |
| ROESNER, K.:    | 1973 | Skriptum zur Praktischen Analysis<br>Institut f. angewandte Mathematik<br>der Universität Freiburg i. Br.                                  |
| SCHÖPFER, W.:   | 1976 | Vom Formquotienten zum Sägebrett<br>Holzmeß- und ertragskundliche Beiträge zur optimalen Rundholzverwertung<br>AFJZ, Heft 4, 147. Jahrgang |
| SLOBODA, B.:    | 1975 | Anwendung der Spline-Interpolation bei der Wiedergabe der Baumschaftform<br>AFJZ im Druck  |
| WERNER, H.:     | 1970 | Praktische Mathematik II<br>Springer, Berlin, 1. Auflage   |

DIE DARSTELLUNG DER BITTERLICHEN INTERPOLATION  
AM SEKTIONSWEISE VERMESSENEN STAMM

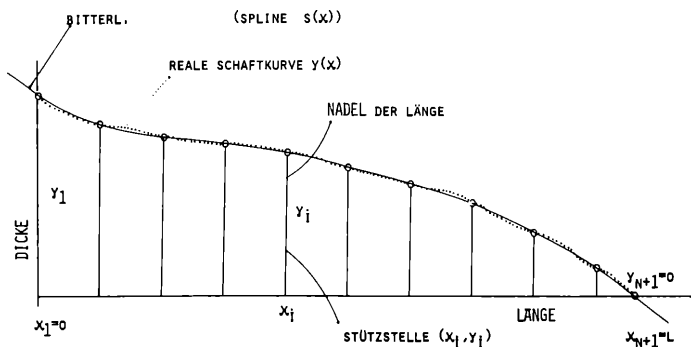
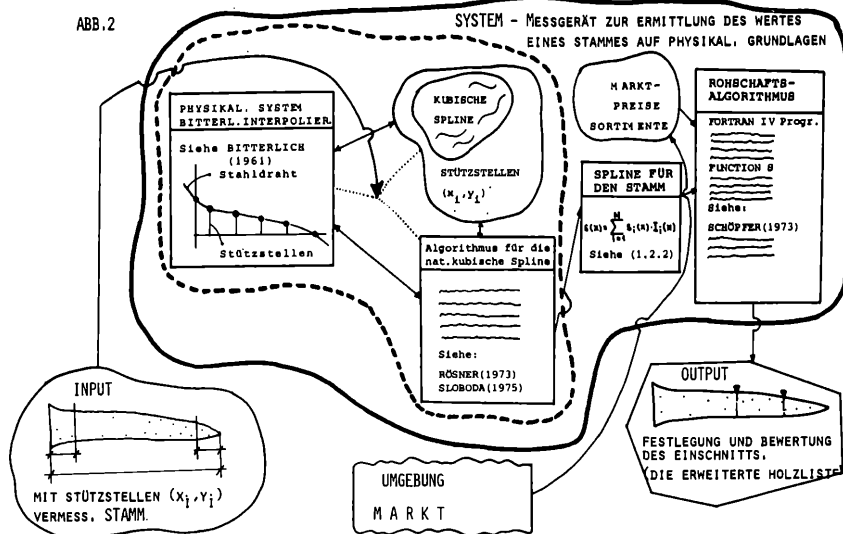
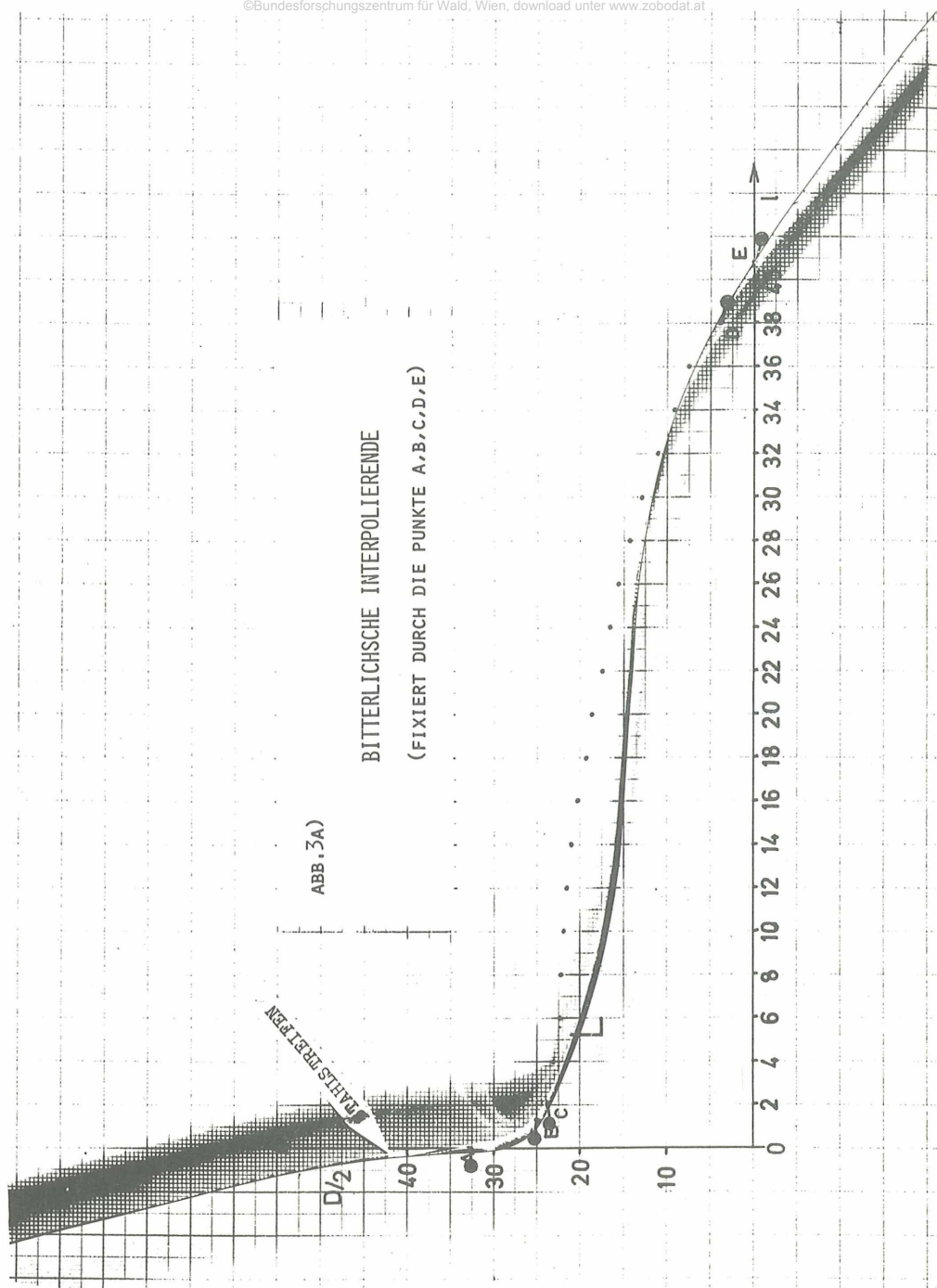
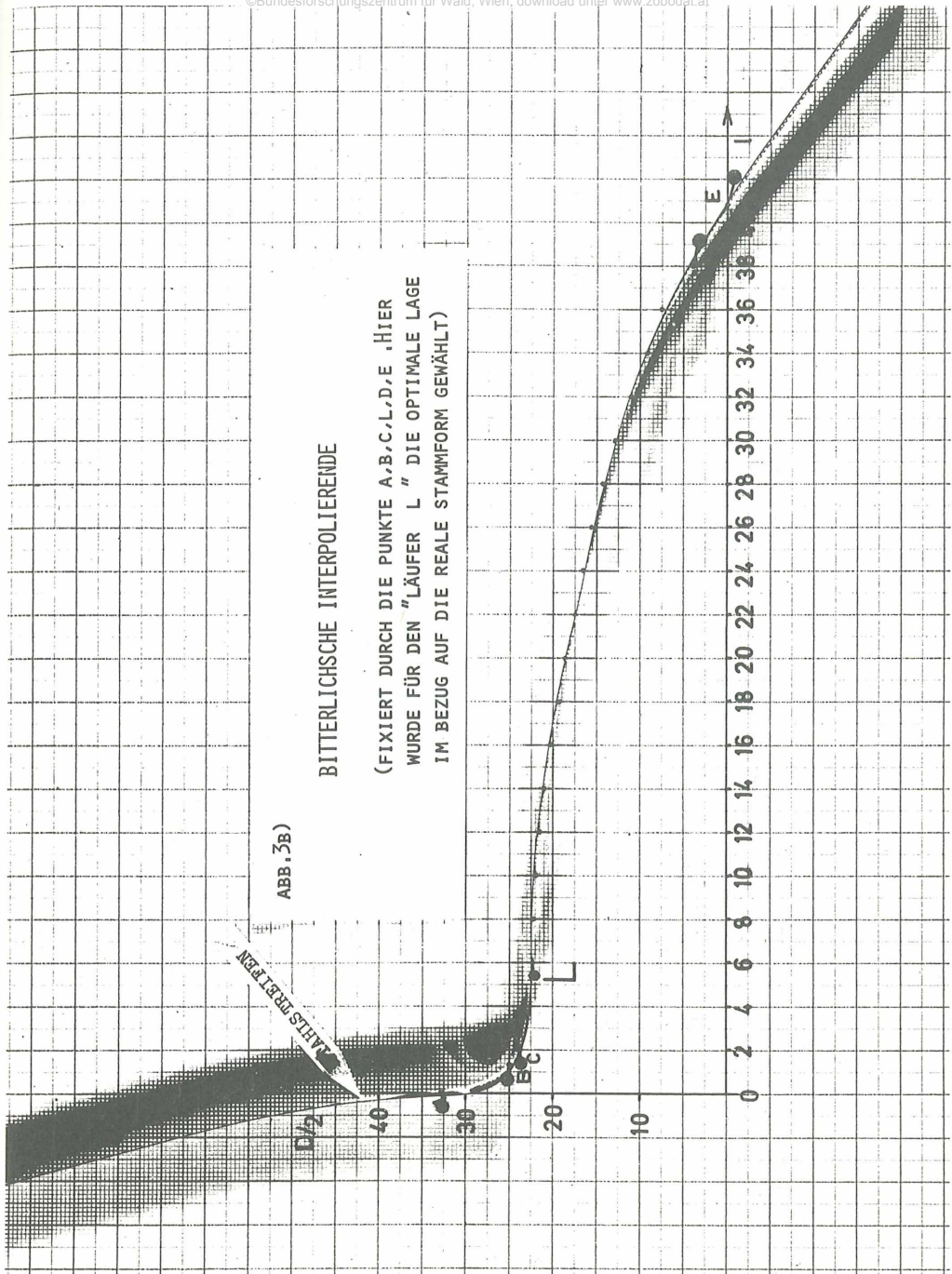


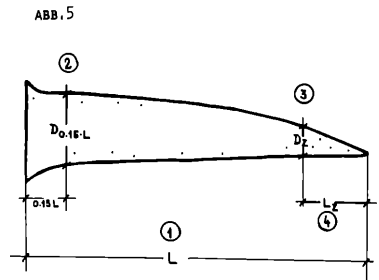
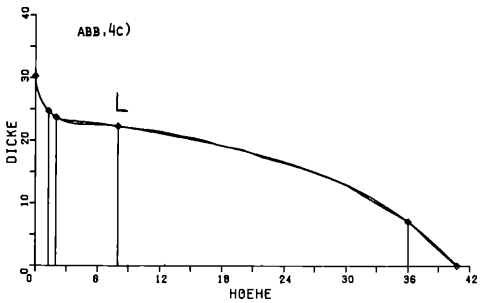
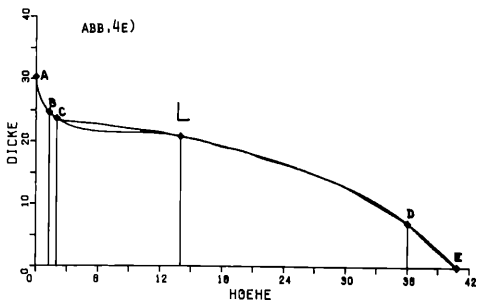
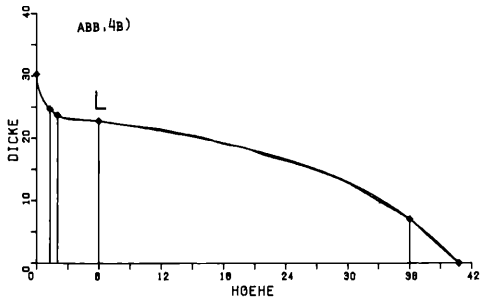
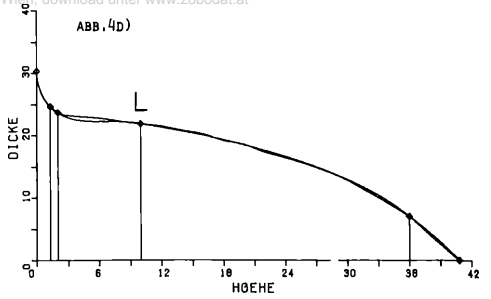
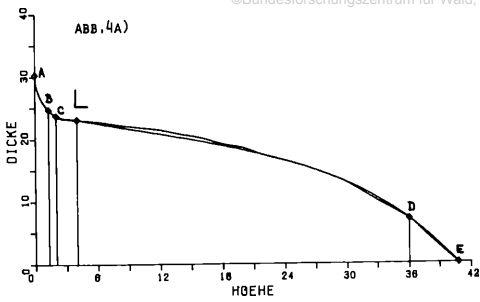
ABB.2











YUFVAG

05.04.76  
12:57:46

SIMULATION DER BITTERLICHEN  
INTERPOLATION DURCH DIE "SPLINES"