

DIE BESCHREIBUNG DER DYNAMIK DER SCHAFTFORMFORTPFLAN-
ZUNG MIT HILFE DER ÄHNLICHKEITSDIFFERENTIALGLEICHUNG
UND DER AFFINITÄT

Branislav SLOBODA

SUMMARY

For a timber prognosis, taking assortment growth in consideration, one has to interpret the growth of the individual trees of a stand as a growth-conformes displacement of single stem (form = taper) curves, thereupon the single tree growth must be dynamically assorted. Equi-form and affinite growth of single stem forms are particularly studied in this context. For equi-form (= similar) growth the similarity differential equation of the first order is used as the description modell (picture 1, 2, 9b and formulae (1.1.1), (1.2.1) trough (1.2.3)). When dynamics equations for diameter and height development exist, an affinite stem form equation would be preferable. Main features of such an equation can be gathered from picture 8 an 9a, formulae (2.2.1) trough (2.2.3). Both methods could also be used to extrapolate stand volume (see comment underneath (1.2.1)).

- 1.0 Die moderne Forstwirtschaft bedient sich in dem zunehmenden Maße verschiedener Planungsmodelle in denen die Holzaufkommenprognosen eine wichtige Rolle spielen. In der Tat handelt es sich um die Fortschreibung der "bestehenden" Holzmasse und dies nicht nur im globalen Massenaufkommen sondern vor allem im Aufkommen und im Wachstum der Sortimente. (Hierzu siehe auch SCHÖPFER, 1966). Diese Aufgabe läßt sich durch Simulation lösen wobei das Bestandeswachstum als noch zu präzisierende Verlagerungen einzelner Baumschaftkurven behandelt wird. Durch das erfaßte Schaftkurvenwachstum wird die Sortimentierung der Bäume in der EDV durchgeführt und so kann das "Aufkommen an Sortimenten" dynamisch verfolgt werden. Hierzu wird es notwendig sein, die bestandesgerechte praxisnahe Anfangssituation zu simulieren d.h. es muß die entsprechende Anzahl von "bestandesnahen Schaftkurven" und die entsprechenden dynamischen Wachstumsquellen die diese Schaftkurven wachstumsgerecht stetig verlagern vorliegen. Zu der Beschaffung der Anfangssituation im Sinne der Vorgabe der bestandesgerechten statistischen Masse (siehe SLOBODA, 1976). In diesem Beitrag wird die Dynamik des

Einzelbaumwachstums näher durchleuchtet. Sie stellt ein wichtiges Teilproblem des geschilderten Gesamtkonzepts der Produktionsprognose dar die wieder für die Optimierung des Wertzuwachses und der Umtriebszeit erforderlich ist.

1.1 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung und Schaftformwachstum

Bereits nach okularer Beobachtung der ausgearbeiteten Stammanalysen z.B. (GUTENBERG, 1915) (Abb. 8a, b) wird sich das Phänomen Stammwachstum als Abdruck eines sich ständig (mehr oder wen.) Äquiform zu vergrößerten Grundklischees auffassen lassen. Die Form des "Grundmusters" eines Stammes ist Ergebnis einer Interaktion aus äußeren und inneren Faktoren. Wird aber eine konkrete Form f angenommen so wird sie "latent" verteidigt. Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung erster Ordnung vom Typ

$$(1.1.1) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x, y) \in \{(0, A) \times (0, B)\} = \mathcal{G}$$

beschreibt ein Richtungsfeld dessen Isoklinen eine Geradenschar bildet (Abb. 1 und Abb. 9b). Die Weitergabe der invarianten schaftmodellierenden Information über die Schafttangente geschieht entlang einer durch den Ursprung laufenden Geraden. (Hierzu siehe SLOBODA, 1976). Die Existenz der Inverse f^{-1} zu f in \mathcal{G} und die Erfüllung der Lipschitzschen Bedingung für f in \mathcal{G} vorausgesetzt läßt sich die Isoklinenschar schreiben

$$(1.1.2) \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = c = \text{const.} \quad y = f^{-1}(c) \cdot x$$

Bemerkung 1.1.1:

Zeichnet man ein Geradenbündel in eine empirische Stammanalyse ein so werden die "Tangentenrichtungen" entlang der Geradenstrahlen näherungsweise gleich (Abb. 9b). Die Dynamik der Fortpflanzung wird dann durch ein Vektorfeld gemäß Abb. 1 gedeutet.

Bemerkung 1.1.2:

Gegenüber einer realen Schaftkurve $\varphi(x) = y(x)$ soll sich $f\left(\frac{y}{x}\right)$ wie folgt approximativ verhalten.

$$(1.1.3) \quad \min_{\forall f} \left| f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \varphi'(x) \right|; \quad x \in (0, A] \quad (\text{Abb. 2})$$

Eine Schaftkurve $y(x) \in \mathcal{C}[0, L]$ soll dann zur Familie des Grundmusters f gehören, wenn $y(x)$ in \mathcal{G} die Lösung der Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $y' = f(y/x)$; $y'(x) = f(y(x)/x)$ ist.

(Siehe SLOBODA, 1976 und Abb. 1). Folgende Eigenschaft der Ähnlichkeitsdifferentialgleichung erweist sich als sehr nützlich: Ist $y(x)$ eine Lösung von (1.1.1) (als ein bestimmter Abdruck des Grundmusters f) so ist auch die Ähnlichkeitstransformation von $y(x)$ in $\bar{y}(x) := \lambda y(x)$; $\bar{x} = \lambda x$ eine Lösung von (1.1.1) denn es ist $f(\lambda y(x)/\lambda x) = f(y(x)/x)$. (Abb.1) Zu Lösungsmethoden von (1.1.1) siehe SLOBODA, 1976. Durch f kann äquiformes Wachstum also hinreichend erklärt werden.

Bemerkung 1.1.3:

Sei $\psi(x)$ eine Lösung von (1.1.1) so ist also auch $y := \lambda \psi(\frac{x}{\lambda})$ eine Lösung von (1.1.1). Es gelten dann folgende geometrische Eigenschaften: (Symbolik zur Abb.4: $l(\hat{a}, \hat{b})$ bzw. $l(a, b)$ ist die Bogen- bzw. Streckenlänge zwischen den Punkten a und b , $V(0, B, A)$ gibt das Volumen des Rotationskörpers der durch die Rotation der Schaftkurve $y = \psi(x)$ um die x -Achse erzeugt wird.)

- 1) $\frac{l(\hat{a}, \hat{b}')}{l(\hat{a}, \hat{b})} = \lambda$; 2) $\frac{l(\hat{A}, \hat{B}')}{l(\hat{A}, \hat{B})} = \lambda$
- 3) $\frac{l(\hat{0}, \hat{B}')}{l(\hat{0}, \hat{B})} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ (d.h. Höhenverhältnis $h(t_0 + \tau)/h(t_0)$)
- 4) $\frac{l(\hat{0}, \hat{A}')}{l(\hat{0}, \hat{A})} = \lambda$ (Durchmessererhältnis am Stammfuß $d(t_0 + \tau)/d(t_0)$)
- 5) $\frac{V(0, B', A')}{V(0, B, A)} = \lambda^3 \Rightarrow V(0, B', A') = V(0, B, A) \cdot \lambda^3$
(Volumenproportionalität)
- 6) Aus 5) folgt für Zuwachsprozent: $Zw\% = (\lambda^3 - 1) \cdot 100\%$ denn $\frac{V(0, B', A') - V(0, B, A)}{V(0, B, A)} = (\lambda^3 - 1)$

Zu 5: Gemäß 3) gilt $l_2 = \lambda l_1$ und für $V(0, B', A')$ ergibt

$$\text{sich } V(0, B', A') = \pi \int_0^2 \lambda^2 \left[\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right]^2 dx \quad \text{subst.: } \frac{x}{\lambda} =: z; \quad dx = \lambda dz$$

$$(1.1.4) \quad V(0, B', A') = \lambda^3 \pi \int_0^1 [\psi(z)]^2 dz = \lambda^3 V(0, B, A); \quad \text{w.z.w.}$$

1.2 Praktische Anwendung und Folgerungen aus der Bemerkung (1.1.3)

Gegeben ist:

- a) die Form des "Stammes" in der "Gegenwart" t_0 mit $y = \psi(x)$
- b) die Höhenentwicklung $h(t) = 1$; bzw. die Durchmesserentwicklung $d(t)$
- c) die Proportionalitätsfunktion $\lambda(t_0, \tau) = h(t_0 + \tau)/h(t_0)$ als die dynamische speisende Quelle
- d) das gegenwärtige Stammesvolumen mit $V_{t_0}(\psi) = \pi \int_0^1 [\psi(x)]^2 dx$
- e) das äquiforme Wachstum

Hieraus ergibt sich:

- * die Form des Stammes in der Zukunft $t_o + \tau$ (notwendig für die Herausarbeitung des Sortimentenwachstums) (Abb.5) mit

$$(1.2.1) \quad y = \lambda(t_o, \tau) \varphi\left(\frac{x}{\lambda(t_o, \tau)}\right)$$

- * die Volumendynamik des Stammes mit der Funktion

$$(1.2.2) \quad v_{t_o + \tau}(\varphi) = \lambda^3(t_o, \tau) v_{t_o}(\varphi) \quad (\text{siehe 5) aus 1.1})$$

- * die Zuwachsprozentdynamik (Volumen) mit der Funktion

$$(1.2.3) \quad z_{t_o, \tau}(\varphi) = (\lambda^3(t_o, \tau) - 1) \quad 100\%$$

Bemerkung 1.2.1:

Durch die Formel (1.2.1) und (1.2.2) läßt sich u.a. überprüfen ob bei einer Stammanalyse Äquiformität des Wachstums angenommen werden kann. "Fallen" die Verhältnisse des Stammfußdurchmessers und Brusthöhendurchmessers zusammen d.h.

$$(1.2.4) \quad d(t_o + \tau)/d(t_o) \doteq d_{13}(t_o + \tau)/d(t_o)$$

so läßt sich $\lambda(t_o, \tau)$ auch mit $d_{13}(t)$ ausdrücken. Es muß aber gelten

$$(1.2.5) \quad d(t_o + \tau)/d(t_o) \doteq h(t_o + \tau)/d(t_o + \tau)$$

(1.2.5) ist eine der notwendigen Bedingungen für die Annahme des äquiformen Wachstums. Ohne hier auf die stochastischen Aspekte näher einzugehen sei eingeräumt, daß (1.2.2) auch für die Fortschreibung der zum Zeitpunkt t_o bekannten Bestandesmasse $v_{t_o}(B)$ angewendet werden kann, wobei für $\lambda^3(t_o, \tau)$ die Funktion $\frac{d_{13}(t_o + \tau)/d(t_o)}{d(t_o)}^3$ aus Mittelstamm eingesetzt wird. Also $v_{t_o + \tau}(B) = \left(\frac{d_{13}(t_o + \tau)/d(t_o)}{d(t_o)}\right)^3 \cdot v_{t_o}(B)$; ($t_o \geq 40$; $\tau \leq 50$). Falls (1.2.4) nicht einmal näherungsweise erfüllt ist, so wird man zur nichtähnlichen Fortschreibung der Schaftform übergehen müssen.

2.0 Zum nichtäquiformen Wachstum

In solchen Fällen bewegt sich invariante schaftmodellierende Richtung entlang einer nichtlinearen Kurvenschar (Abb.6). Das Richtungsfeld der Form $y' = f(y/\tau(x))$ mit bereits erwähnten Regularitätseigenschaften für f hat die Isoklinen

$$(2.0.1) \quad y = f^{-1}(c) \cdot \tau(x) \quad (x, y) \in \mathcal{S}$$

Ist insbesondere $\tau(\dot{x}) := x^{1+\varepsilon}$; $\varepsilon > 0$ so liegt ein Richtungsfeld etwa wie in Abb. 6 vor. Zu Trajektorien der Fortpflanzung siehe ebenfalls Abb. 6. Näheres hierzu bei SLOBODA, 1976. Der "allgemeinste" Fall wird durch die in Abb. 7 dargestellte Situation beschrieben.

2.1 "Affines Wachstum" der Schaftform als eine praxisnahe Methode

Die naheliegende Erweiterung der Äquiformität erhält man durch die "Streckung" der Schaftkurve $\psi(x)$ in Höhen- und Durchmesser-richtung zugleich dies aber mit zwei verschiedenen Intensitäten.

$$(2.1.1) \quad d_{t_0}(\tau) := d_{13}(t_0 + \tau)/d(t_0) \quad h_{t_0}(\tau) := h(t_0 + \tau)/h(t_0)$$

Dies geschieht durch $\bar{x} := d_{t_0}(\tau) \cdot x$; $\bar{y} := h_{t_0}(\tau) \cdot y$

Gilt $d_{t_0}(\tau) = h_{t_0}(\tau)$ so liegt äquiforme Streckung (Wachstum) vor.

Die ausführlicheren Betrachtungen zum "affinen Wachstum" sind bei SLOBODA, 1976, S.91-106 zu finden. Verfährt man adäquat wie beim "ähnlichen Fall" dann lassen sich auch hier schaft- und volumenfortschreibende Funktionen (siehe Abb. 8 und 2.2) angeben.

2.2 Praktische Anwendung und die Folgerungen aus dem "affinen Wachstum"

Gegeben ist:

- a) die Form des "Stammes" in der "Gegenwart" t_0 mit $y = \psi(x)$
- b) die Höhen- und Durchmesserentwicklung mit $l = h(t)$ bzw. $d(t)$
- c) die aus b gemäß (2.1.1) errechnete dynamische Funktionen $d_{t_0}(\tau)$ und $h_{t_0}(\tau)$
- d) das Volumen des Stammes ψ in t_0 mit $V_{t_0}(\psi) = \pi \int_0^{h(t_0)} [\psi(x)]^2 dx$
- e) die Annahme des "affinen Wachstums"

Hieraus ergibt sich:

* die Schaftform des Stammes in der Zukunft $t_0 + \tau$ mit

$$(2.2.1) \quad y = d_{t_0}(\tau) \cdot \psi\left(\frac{x}{h_{t_0}(\tau)}\right) \quad (\text{Beispiel Abb. 9a})$$

* die zukünftige Volumendynamik des Stammes mit der Funktion

$$(2.2.2) \quad V_{t_0+\tau}(\psi) = d_{t_0}^2(\tau) \cdot h_{t_0}(\tau) \cdot V_{t_0}(\psi) \quad (\text{ähnlich wie 5})$$

* die Zuwachsprozentfunktion für das Volumen mit

$$(2.2.3) \quad Z_{t_0,\tau}(\psi) = (d_{t_0}^2(\tau) \cdot h_{t_0}(\tau) - 1) \cdot 100\%$$

- * der laufende Volumenzuwachs durch die Ableitung von (2.2.2) nach τ . In der Abb. 9a ist eine praktische Anwendung von (2.2.1) graphisch verifiziert in der der Polygon einer 60jährigen Schaftform in die Zukunft 80, 100, 140, 157 Jahre affin projiziert (punktierte Linie) und der Realität (volle Linie) gegenübergestellt wurde. $\left(\max_t |V_{\text{aff}}(t) - V_{\text{real}}(t)| / V_{\text{real}}(t) \cdot 100\% < 10\% \right)$.
- Bei Gutenbergischen Stämmen liefert die Volumenprognose (2.2.2) für $t_0 = 40$ und $\tau = 60$, (60 Jahre Prognosezeitraum!) Abweichungen die fast alle unter 10% liegen.

3.0 Fazit

Es wurden zwei neuartige Form-, Volumen- und Zuwachsfortschreibungsverfahren angegeben, die außer der Anfangsform und Volumen nur wenige dynamische praxisorientierte Funktionen ($d_{13}(t), h(t)$) benötigen. (Für die äquiforme Fortschreibung ist nur d_{13} eine der Funktionen erforderlich.) Die Methoden lassen sich auch zur Volumen- und Zuwachsfortschreibung in den gleichaltrigen Beständen anwenden.

LITERATURHINWEISE

- GUTENBERG, A.: 1915 Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge, Wien und Leipzig.
- SCHÖPFER, W. : 1966 Automatisierung der Massen-, Sorten- und Wertberechnung stehender Waldbestände, Schriftenreihe der LFV Ba-Wü, Bd. 21
- SLOBODA, B. : 1976 Mathematische und stochastische Modelle zur Beschreibung der Dynamik von Bäumen und Beständen, insbesondere das bestandesspezifische Wachstum als stochastischer Prozess, Freiburg i.Br., eingereicht als Habilitation an der Forstl. Fakultät

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. Dr. Branislav SLOBODA
Forstl. Versuchs- und Forschungs-
anstalt Baden - Württemberg
Abt. Biometrie und Informatik
Sternwaldstraße 16
D - 78 F R E I B U R G i.Br. BRD

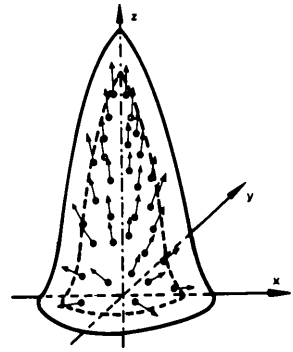
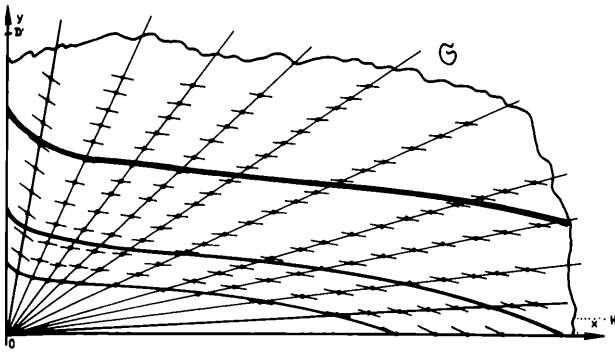


ABB.2

ABB.3

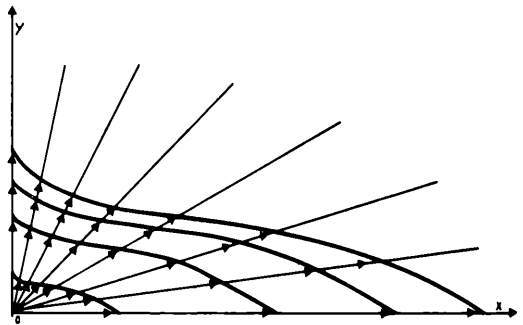
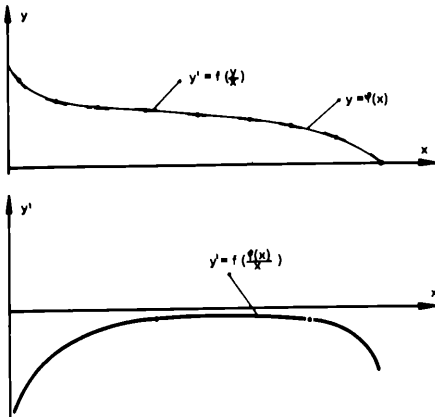


ABB.4

ABB.5

