

NOTIONS GÉNÉRALES DU VOLUME RELATIF DE TIGE ET SON ACCROISSEMENT

Shinichi OSUMI

INTRODUCTION

Jusqu'à aujourd'hui, on calculait très souvent le volume d'une tige selon la formule suivante:

$$v = g_b h f_b$$

g_b : surface terrière,

h hauteur de tige,

f_b : coefficient de forme à la hauteur d'homme.

Par conséquent, lorsqu'on étudiait l'accroissement du volume d'une tige ou d'un peuplement, on décomposait habituellement le volume de tige en trois facteurs susdits, et on étudiait leurs accroissements l'un après l'autre. Cette manière de l'analyse d'accroissement, cependant, a un point faible que l'on fixe la hauteur de la place du diamètre à mesurer toujours à la hauteur d'homme, sans tenir compte de l'accroissement de la hauteur de la tige. Pour améliorer ce point, on employait la manière de changer la place de diamètre à mesurer proportionnellement à la hauteur de la tige. C'est-à-dire, on remplaçait le diamètre à hauteur d'homme par le diamètre à neuf dixièmes de la tige à partir du sommet, et par conséquent, le coefficient de forme à la hauteur d'homme par le coefficient de forme vrai. En ce cas, le volume de la tige s'exprime par la formule comme suit:

$$v = g_{0.9} h \lambda_{0.9} = \frac{\pi}{4} d_{0.9}^2 h \lambda_{0.9}$$

$d_{0.9}$: le diamètre à neuf dixièmes de la hauteur de la tige à partir du sommet, nous l'appelons "diamètre normal" dans ce rapport,

$g_{0.9}$: surface circulaire correspondant à $d_{0.9}$,

$\lambda_{0.9}$: coefficient de forme vrai.

Nous trouvons de grand progrès dans cette idée et la manière, mais d'autre part, nous voyons encore de l'obscurité dans la notion du coefficient de forme vrai au point de vue de la composition du volume de la tige.

C'est ainsi que l'auteur a essayé de saisir clairement la composition du volume de la tige en introduisant la notion du volume relatif au lieu du coefficient de forme vrai $\lambda_{0.9}$, et d'exprimer rationnellement la relation entre le volume et la forme de la tige.

Dans ce rapport, l'auteur explique d'abord, les notions générales du volume relatif, et puis présente le fait que le volume relatif croît avec l'âge, et le procédé de son accroissement, en utilisant les résultats des analyses de dix tiges choisis, cinq pour chacun, dans deux différents peuplements artificiels et équiennes de *Cryptomeria japonica*.

NOTIONS GENERALES DU VOLUME RELATIF DE TIGE

1. DÉFINITION DU VOLUME RELATIF

Supposons que la forme de la section transversale de la tige soit circulaire partout sur la tige.

Soit Y le rayon à la distance de X à partir du sommet sur la tige, la fonction

$$Y = F(X) \quad \text{-----} \quad (1)$$

s'exprime une courbe qu'on appelle généralement la courbe de tige. D'autre part, nous appelons la courbe exprimée par la fonction

$$y = f(x) \quad \text{-----} \quad (2)$$

la courbe relative de tige, y étant le rayon relatif basé sur $d_{0.9}$, à la distance relative x à partir du sommet de la tige:

$$y = Y / d_{0.9} , \quad x = X / h$$

Soit v le volume actuel de la tige,

$$v = \pi \int_0^h \{ F(X) \}^2 dX \quad \text{----- (3)}$$

Si l'on emploie la courbe relative de la tige au lieu de la courbe actuelle, on peut écrire la formule précédente comme suit:

$$v = h d_{0.9}^2 \cdot \pi \int_0^1 \{ f(x) \}^2 dx \quad \text{--- (4)}$$

Dans la formule (4), si nous mettons

$$\theta_{0.9} = \pi \int_0^1 \{ f(x) \}^2 dx \quad \text{----- (5)}$$

$\theta_{0.9}$ est le volume du solide engendré par la rotation de la courbe relative de la tige autour de son axe. Ce solide de rotation est un solide qui doit être donné au cas où l'on réduit l'hauteur de la tige à $1/h$ et le diamètre à $1/d_{0.9}$ partout le long de la tige. Nous appelons ce solide "le solide fondamental". $\theta_{0.9}$ étant le volume de ce solide fondamental, le volume actuel de la tige s'exprime par la formule:

$$v = h d_{0.9}^2 \theta_{0.9} \quad \text{----- (6)}$$

C'est ainsi que nous appelons $\theta_{0.9}$ le volume relatif.

2. CARACTÈRES DU VOLUME RELATIF

(1) Relation avec le coefficient de forme vrai.

On transforme la formule (4) ainsi qu'il suit:

$$v = \frac{\pi}{4} h d_{0.9}^2 \cdot \int_0^1 \{ 2 f(x) \}^2 dx \quad \text{--- (7)}$$

Dans la formule (7), puisque $\frac{\pi}{4} h d_{0.9}^2$ correspond au

volume du cylindre, dont le diamètre est égal à $d_{0.9}$ et l'hauteur à h ,

$$\lambda_{0.9} = \int_0^1 \{ 2 f(x) \}^2 dx \quad \text{----- (8)}$$

n'est que le coefficient du forme vrai. Par conséquent, il existe la relation suivante entre le volume relatif et coefficient du forme vrai:

$$\theta_{0.9} = \frac{\pi}{4} \lambda_{0.9} \quad \text{----- (9)}$$

(2) Indépendance de la hauteur et du diamètre normal.

La forme de la section verticale du "solidee fundamental" contenant son axe montre la forme relative ou géométrique de la section verticale de la tige actuelle, et celle-là se détermine indépendamment de la hauteur de la tige et du diamètre normal. Par conséquent le volume relatif qui n'est que le volume du "solidee fundamental", est aussi indépendant de l'hauteur et du diamètre normal de la tige actuelle.

3. UTILITÉ DU VOLUME RELATIF

(1) Indice de forme relative et de forme actuelle.

Le volume relatif étant le volume du solidee fundamental qui se détermine seulement par la forme relative de la tige actuelle, celui-là est aussi utile que le coefficient de forme vrai, pour indiquer la "forme relative" de la tige.

D'autre part, on peut considérer la tige actuelle comme le solidee fundamental grossi h fois pour la hauteur et $d_{0.9}$ fois pour le diamètre, et par conséquent, on entend qu'il y aurait de diverses formes actuelles de tiges qui se basent sur une forme relative d'après les proportions des hauteurs aux diamètres normaux (Fig. 1). Autrement dit, la forme actuelle de la tige se fixe par la forme relative et le rapport entre son hauteur et son diamètre normal. Par conséquent, si l'on adopte la notation

$$\gamma = h / d_{0.9} \quad \text{----- (10)}$$

on peut exprimer la forme actuelle de la tige en utilisant $\theta_{0.9}$ et γ . Si l'on les unifie par la multiplication l'un par l'autre, et écrit

$$\omega = \gamma \theta_{0.9} \quad \text{----- (11)}$$

on peut utiliser ω comme un bon indice de la forme actuelle, grâce à son caractère suivant:

$$\omega = \frac{h}{d_{0.9}} \theta_{0.9} = \frac{1}{d_{0.9}^3} h d_{0.9}^2 \theta_{0.9} = \frac{v}{d_{0.9}^3} \quad \text{----- (12)}$$

c'est-à-dire, ω est le rapport du volume actuel de la tige à celui du cube dont les côtés sont égaux au diamètre $d_{0.9}$,

et par conséquent, plus haut est la hauteur de la tige et plus grand est le volume relatif, par comparaison au diamètre normal $d_{0.9}$, plus le coefficient ω devient grand. L'indice ω se réfléchit donc dans la forme actuelle de la tige.

(2) Un des composants du volume de la tige.

Lorsque la tige actuelle s'engendre du solide fondamental étant donné actuellement l'hauteur et le diamètre normal $d_{0.9}$, le volume de la tige se décompose toujours en trois composantes: la hauteur, le diamètre normal et le volume relatif.

En utilisant le coefficient de forme vrai, on peut aussi décomposer le volume de la tige en trois composants. Mais en ce cas, la notion du coefficient de forme vrai n'est pas parfaitement claire au point de vue de la composition du volume de la tige, c'est-à-dire, il n'est considéré qu'un facteur de réduction, par lequel il faut multiplier le volume du cylindre à comparer pour avoir le volume de la tige. Au contraire, le volume relatif signifie le volume du solide fondamental qui doit être considéré comme "le noyau" de la tige actuelle. Par conséquent, en utilisant le volume relatif, on peut analyser très clairement le volume de la tige.

(3) Explication du volume du peuplement.

Soit V le volume total du peuplement, N le nombre de tiges du peuplement,

$$v = \sum_{i=1}^N h_i d_{0.9_i}^2 \theta_{0.9_i} \quad \text{----- (13)}$$

Étant $\theta_{0.9}$ indépendant de l'hauteur et du diamètre normal, la formule précédente peut être transformée comme suit:

$$v = \bar{\theta}_{0.9} \sum_{i=1}^N h_i d_{0.9_i}^2 \quad \text{----- (14)}$$

étant

$$\bar{\theta}_{0.9} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_{0.9_i}$$

Nous espérons que le coefficient de variation de $\theta_{0.9}$ est très petit et reste moins de 10 o/o.

La formule (14) veut dire comme suit: "Dans un peuplement, il existe un solide fondamental commun aux tiges qui composent le peuplement. Sur la base de son volume, c'est-à-dire, sur la base du volume relatif commun, les tiges du peuplement doivent avoir leur volumes chacune, suivant leur hauteurs et leur diamètres normaux qui varient d'une à l'autre. Les volumes des tiges ainsi formés se réunissent pour faire le volume du peuplement".

L'interprétation du volume de peuplement telle que cela, serait bien utile pour étudier son développement.

ACCROISSEMENT DU VOLUME RELATIF

Comme nous avons déjà vu , il est clair qu'il n'y a aucune relation entre le volume relatif et deux autres éléments, la hauteur et le diamètre normal. Cependant, il n'est pas suffisamment étudié, paraît-il, si le volume relatif croît avec l'âge de la tige. Nous avons une seule étude qui a été travaillée par NAGEL sur l'accroissement du coef-

ficient de forme vrai qui se lie par la relation fonctionnelle au volume relatif. Il a étudié expérimentalement le développement de la forme de la tige d'épicéa, et rapporté que le coefficient de forme vrai croît rapidement jusqu'à 50 ans, et à partir de cet âge, plus lentement, pour atteindre sa valeur maximale entre 70 et 80 ans, et ensuite il diminue lentement.

L'auteur a fait quelques observations sur l'accroissement du volume relatif de la tige, en utilisant les dix arbres abattus dans deux différents peuplements artificiels et équiennes de *Cryptomeria japonica*.

1. MÉTHODE POUR ESTIMER LA FORME RELATIVE DU PASSÉ PAR L'ANALYSE DE TIGE

Pour étudier l'accroissement du volume relatif du passé d'une tige, il est nécessaire d'obtenir les courbes relatives de tiges de chaque étage d'âge du passé de cette tige. Pour cela il faut que nous prenions des disques de la tige à des intervalles appropriés suivant les cas. Au cas considéré, ils doivent être plus étroits qu'au cas de l'analyse de tige habituelle. Surtout aux voisinages de la souche, il faut diminuer les intervalles plus encore, pour avoir les courbes de tige exactes pour de jeunes âges.

On peut avoir la courbe d'accroissement de la hauteur basé sur les données de disques. On estime la hauteur de tige à l'âge considéré sur la base de la courbe d'accroissement de la hauteur, d'autre part, on mesure les rayons moyens aux âges considérés sur les disques correspondants. En arrangeant les résultats, on peut avoir les données qui contiennent des paires de valeurs de mesurages concernant aux distances du sommet et les rayons correspondants, pour chacun des âges considérés.

On détermine ensuite la formule de la courbe de tige pour chacun des âges considérés, en appliquant la méthode des moindres carrés aux données précédents. Comme la formule de la coube de tige, on a choisi le polynôme qui a des avantages d'être flexible et facile à intégrer. D'abord nous avons adopté le polynôme de troisième degré, mais il était

peu convenable aux formes de jeunes tige. Nous avons donc adopté ensuite le polynôme de cinquième degré:

$$Y = \sum_{j=1}^5 B_j X^j \quad \text{-----} \quad (15)$$

Soit n le nombre de paires des observations, les degrés de liberté deviennent n - 5. Il arrive le cas où les degrés de liberté ne sont pas suffisantes pour tirer des conclusions statistiques pour les jeunes tiges dont le nombre des observations est limité. Par conséquent, nous nous sommes limités à n'adopter pour les études suivantes que les cas où les degrés de liberté étaient plus de 3 et en même temps, l'écart-type en pour-cent des écarts résiduels moins de 5 o/o.

Etant donné la courbe actuelle de tige, se fixent facilement les facteurs suivants:

$$\text{diamètre normal: } d_{0.9} = 2 \sum_{j=1}^5 B_j (0.9 h)^j$$

$$\text{diamètre au milieu: } d_{0.5} = 2 \sum_{j=1}^5 B_j (0.5 h)^j$$

$$\text{diamètre à hauteur d'homme: } d_b = 2 \sum_{j=1}^5 B_j (h - 1.2)^j \quad *$$

$$\text{rapport de l'hauteur au diamètre normal: } \gamma = h / d_{0.9}$$

$$\text{diamètre relatif au milieu: } \eta_{0.5} = d_{0.5} / d_{0.9}$$

$$\text{diamètre relatif à la hauteur d'homme: } \eta_b = d_b / d_{0.9}$$

On transforme ensuite la formule de la courbe actuelle de tige en celle de la courbe relative:

$$y = \sum_{j=1}^5 b_j x^j \quad \text{-----} \quad (16)$$

étant

$$b_j = \frac{h^j}{d_{0.9}^j} B_j \quad \text{-----} \quad (17)$$

* Au Japon, on emploie 1.2 m comme la hauteur d'homme.

d'où se calculent les facteurs comme suit:

coefficient de forme vrai:

$$\lambda_{0.9} = 4 \int_0^1 y^2 dx = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{4 b_i b_j}{i + j + 1}$$

volume relatif: $\theta_{0.9} = \frac{\pi}{4} \lambda_{0.9}$

coefficient de forme à l'hauteur d'homme: $f_b = \lambda_{0.9} / \eta_b^2$

Tous les travaux de calcul ont été exécutés au Centre de Calcul de l'Université de Kyoto, avec FACOM 230-60.

2. MATÉRIAUX

Comme on dit précédemment, on a utilisé dix arbres abattus, cinq pour chacun, dans deux différents peuplements artificiels et équiennes de *Cryptomeria japonica*.

(1) Peuplement I

La moitié des arbres sont venus d'un peuplement artificiel et équienne de *Cryptomeria japonica* dans la Forêt d'Expérience appartenant à la Faculté d'Agriculture de l'Université Préfectorale de Kyoto, située à 50 km environ du nord-ouest de Kyoto. Les âges et les grandeurs des arbres sont présentés dans le tableau 1.

On a découpé des disques des arbres abattus, à l'intervalle de 0.05h jusqu'à 70 o/o de la hauteur totale à partir du sommet, et au dessous de cette position, à l'intervalle de 0.02h à 0.04h selon les cas. 25 disques ont été obtenus pour chacun des arbres. Cependant, moins âgée est la tige, moins nombreux sont des disques correspondants, et par exemple, les disques correspondants n'ont été que 8 à 9 à l'âge de dix ans.

Tableau 1. Les âges et les grandeurs des arbres appartenant au Peuplement I

Table 1. Ages and sizes of trees belonging to the Stand I

No.	âge, age	h	d _{0.9}	d _b
1	56	24.8 m	28.5 cm	30.4 cm
2	56	25.0	35.6	37.9
3	56	22.9	29.4	30.6
4	56	21.8	27.2	28.5
5	56	24.6	29.3	30.8

(2) Peuplement II

Le deuxième peuplement est un peuplement artificiel et équienné de *Cryptomeria japonica* dans la forêt appartenant à une société forestière, située à 20 km de l'ouest de Beppu dans la région de Kyushu. Les âges et les grandeurs des arbres sont présentés dans le tableau 2.

Tableau 2. Les âges et les grandeurs des arbres appartenant au Peuplement II

Table 2. Ages and sizes of trees belonging to the Stand II

No.	âge, age	h	d _{0.9}	d _b
1	39	18.9 m	21.2 cm	22.8 cm
2	40	19.8	23.4	25.4
3	39	20.4	27.1	29.1
4	39	20.0	26.9	28.9
5	39	19.0	24.5	26.3

On a découpé des disques des arbres abattus à l'intervalle de 0.1h jusqu'à 70 o/o de la hauteur totale à partir du sommet, et au dessous de cette position, à l'intervalle de 0.05h, ajoutant en outre ceux à la hauteur d'homme et à 0.2 m sur la terre. 14 disques ont été obtenus pour chacun des arbres, et le nombre de disques correspondant aux âges de 14 ou 16 ans n'est que 8, en retenant à peine la limite inférieure des degrés de la liberté. Par conséquent, pour étudier la forme de tige plus jeune que cet âge, il serait nécessaire d'obtenir des disques à l'intervalle plus étroite qu'au dessus.

Pour présenter les exemplaires des courbes de tige ajustées au polynôme de cinquième degré par la méthode des moindres carrés, nous dessinons courbes de tige des arbres I - No.1 et II - No.1 dans Fig. 2 et 3.

3. RESULTATS

Nous présentons, dans les tableaux 3 et 4, les valeurs des volumes relatifs calculées par les manières précédemment écrites, sur tous les arbres utilisés.

Pour examiner la transision du volume relatif avec l'âge, nous appliquons la parabole de deuxième degré aux relations entre les valeurs moyennes de volume relatif et les âges correspondants dans les tableaux 3 et 4 respectivement, par la méthode des moindres carrés:

pour le Peuplement I,

$$\hat{\theta}_{0.9} = 0.32390 + 0.0039584 t - 0.000040424 t^2$$

----- (18)

où t étant l'âge d'arbre,

pour le Peuplement II,

$$\hat{\theta}_{0.9} = 0.20621 + 0.0068190 t - 0.000054247 t^2$$

----- (19)

Nous présentons ces courbes dans Fig. 4, avec les taux d'accroissement de $\hat{\theta}_{0.9}$ calculés des formules (18) et (19).

Tableau 3. Volumes relatifs calculés par classe d'âge (Peuplement I)
 Table 3. Relative volumes calculated by age class (Stand I)

No.	Age, age									
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
1	0.3537	0.3788	0.3982	0.4143	0.4236	0.4139	0.4064	0.4110	0.4149	0.4192
2		0.3439	0.3751	0.4006	0.4061	0.4117	0.4166	0.4130	0.4097	0.4126
3	0.3474	0.3412	0.3635	0.3840	0.3925	0.4038	0.4116	0.4180	0.4208	0.4206
4		0.3921	0.3962	0.3962	0.4066	0.4035	0.4098	0.4203	0.4261	0.4238
5	0.3808	0.3859	0.4077	0.4180	0.4237	0.4230	0.4236	0.4251	0.4307	0.4344
Moyenne, Mean	0.3606	0.3684	0.3882	0.4026	0.4105	0.4112	0.4136	0.4175	0.4204	0.4221

Tableau 4. Volumes relatifs calculés par classe d'âge (Peuplement II)
 Table 4. Relative volumes calculated by age class (Stand II)

No.	Age, age							
	14	16	18	20	25	30	35	39-40
1	0.2960	0.2849	0.3009	0.3259	0.3481	0.3813	0.3980	0.4140
2		0.3176	0.3092	0.3355	0.3472	0.3743	0.3845	0.4015
3		0.3032	0.3102	0.3278	0.3303	0.3595	0.3682	0.3823
4	0.2851	0.3021	0.3202	0.3363	0.3463	0.3657	0.3707	0.3792
5		0.2897	0.3061	0.3246	0.3246	0.3417	0.3599	0.3773
Moyenne Mean	0.2906	0.2995	0.3093	0.3300	0.3365	0.3645	0.3762	0.3909

Des résultats que nous avons obtenus au dessus, nous voyons très clairement que le volume relatif a une tendance de s'augmenter avec l'âge, pour le peuplement I ainsi que le peuplement II. Cependant les procédés d'accroissement diffèrent l'un de l'autre suivant les peuplement, c'est-à-dire, le taux d'accroissement de $\hat{\theta}_{0.9}$ est deux fois plus grand au peuplement II qu'au peuplement I. D'autre part, on voit dans Fig. 4 que le volume relatif croît beaucoup plus lentement que l'hauteur, le diamètre ou le volume actuel, et qu'il a une tendance d'atteindre une limite supérieure, comme on l'aperçoit très souvent sur la courbe d'accroissement habituelle. Toutefois il serait possible que, comme NAGEL relève, le volume relatif atteint son maximum à un âge assez haut, et après cet âge, se diminue lentement avec l'âge, parce que il est une quantité relative et différente d'autres quantités absolues; l'hauteur, le diamètre, le volume actuel etc.

Dans Figures 5 et 6, nous présentons des aspects du développement de la forme relatif de tige, duquel résulte l'accroissement du volume relatif $\theta_{0.9}$. La tige I - No.1 a sa forme relative déjà assez développée même à l'âge de dix ans, et par conséquent, le développement subséquent est peu important. Au contraire, la tige II - No.1 étant d'une forme très mince dans les jeunes âges, se développe sensiblement avec l'âge.

Nous examinons, d'autre part, la relation entre le volume relatif $\theta_{0.9}$ et le diamètre relatif au milieu de tige $\eta_{0.5}$:

pour le Peuplement I,

$$\hat{\theta}_{0.9} = 0.42820 - 0.69343 \eta_{0.5} + 0.91870 \eta_{0.5}^2 \quad \text{--- (20)}$$

pour le Peuplement II,

$$\hat{\theta}_{0.9} = 0.36847 - 0.60066 \eta_{0.5} + 0.92278 \eta_{0.5}^2 \quad \text{--- (21)}$$

En présentant les résultats dans Fig. 7, nous pouvons voir cette relation entre $\theta_{0.9}$ et $\eta_{0.5}$ être très intime. Il est claire que le volume relatif $\theta_{0.9}$ augmente suivant la courbe

sa valeur avec le diamètre relatif au milieu de tige $\eta_{0.5}$
Si l'on veut, on peut utiliser cette relation pour estimer
la valeur de $\theta_{0.9}$

CONCLUSION

Le volume relatif exprime le volume du solide fondamental qui signifie le noyau de la tige, et compose le volume actuel de tige, comme un des trois éléments, avec l'hauteur et le diamètre normal. Par conséquent, le volume relatif serait non seulement utile pour indiquer la forme relative de tige, mais aussi important comme le facteur de l'analyse pour étudier l'accroissement du volume d'une tige ou d'un peuplement.

En ajoutant à son caractère d'être indépendant de l'hauteur et du diamètre normal de tige, le volume relatif a sa supériorité de varier très peu dans un peuplement. Ces deux caractères rehaussent les utilités du volume relatif pour l'analyse de l'accroissement du peuplement.

Jusqu'à aujourd'hui, on ne connaissait pas très clairement si le volume relatif croît avec l'âge. Par ses études, l'auteur a éclairé ici que le volume relatif croît avec l'âge aussi bien que l'hauteur et le diamètre normal, dans le peuplement artificiel et équienne, c'est-à-dire que la forme relative de tige développe avec l'âge. Cependant le procédé de l'accroissement du volume relatif est plus lent que les autres. Et encore, provenant de sa nature, il serait possible que le volume relatif décroît avec l'âge, après avoir atteint son maximum à un âge assez haut. D'autre part, on peut dire que le procédé de l'accroissement du volume relatif est différent suivant les peuplement. C'est un fait très intéressant qui nous indique que le traitement du peuplement, l'éclaircie, l'élagage par exemple, influence bien le développement de la forme relative de tige.

Références

1. Osumi, S.: Studies on the stem form of the forest trees
(1) On the relative stem form.
Jour. Jap. For. Soc., 41(12), 1959.
2. Prodan, M.: Holzmesslehre, Frankfurt/M., 1965.
3. Kajihara, M.: Estimation of normal form factor and its
application to the measurement of stand volume.
Jour. Jap. For. Soc., 51(3), 1969.
4. Nagel, D.: Untersuchungen über die Formentwicklung des
Fichtenschafes.
Allg. Forst u. Jagdz., 140(2), 1969.

Author:

Shinichi Osumi
30, Shimogamo-kishimoto-cho,
Sakyo-ku, Kyoto, Japan