Ueber das Fallgesetz der Riese.

Von

Ingenieur **Friedr. Steiner,**

Docent am Wiener Polytechnikum und an der k. k. Hochschule für Bodencultur.

Gelegentlich der Vornahme seiner Versuche über die Riese fand C. Petraschek, wie diess auch in vorstehendem Aufsatze angedeutet ist, dass die berechneten Reibungscoefficienten, abgesehen von den zufälligen Beobachtungsfehlern, differirten; je nachdem sie aus längeren oder kürzeren Wegstrecken berechnet waren, die das Versuchsstück durcheilt hatte. Diess würde unmöglich sein, wäre die Bewegung wirklich eine gleichförmig beschleunigte, wie sie der Ableitung der Formel zu Grunde liegt. Es ist nun, zunächst allerdings nur vom rein theoretischen Standpunkte aus betrachtet, interessant, Untersuchungen über die Ursachen anzustellen, die der beobachteten Erscheinung zu Grunde liegen. Vor allem drängen sich uns zwei Erklärungsgründe auf, der Einfluss des mit wachsender Geschwindigkeit zunehmenden Luftwiderstandes, der auf die Bewegung verzögernd einwirkt und die Variabilität des Reibungscoefficienten, welcher nach Erfahrungen, die man auf anderem Gebiete gewonnen, wahrscheinlich mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt, wodurch eine Zunahme der Beschleunigung erzeugt wird.

Ueber das Gesetz der Abhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Geschwindigkeit des Bewegten liegen noch wenig Versuche vor. Bochet setzt:

$$1)\quad f_v = \frac{f_0 - f_1}{1 + \frac{v}{u}} + f_1$$

wobei f_0 den Reibungscoefficienten bei unendlich langsamer Geschwindigkeit, f_1 den Werth für sehr schnelle Bewegung u eine Erfahrungsgrösse f_v den Reibungscoefficienten bei der Geschwindigkeit v bezeichnet. Er fand das Gesetz durch seine Versuche, welche bei bedeutendem Drucke auf die sich reibenden Flächen vorgenommen wurden, bestätigt. Ohne die Giltigkeit dieses Ausdruckes auch für die hier vorliegenden Verhältnisse als feststehende Thatsache betrachtet wissen zu wollen, möge er, um einige Anhaltspunkte zu gewinnen, in folgenden Untersuchungen in Rechnung kommen.

Zunächst ergibt sich mit Rücksicht auf die Widerstände der Reibung für die Beschleunigung g'' des fallenden Holzes auf einer geraden Strecke von dem Neigungswinkel α gegen die Horizontale

$$2)\quad g'' = (\sin \alpha - f_v \cos \alpha)\, g$$

Setzt man hierin

$$(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha)\, g = g'$$

und berücksichtigt 1) so wird:

$$g'' = \frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{f_0 - f_1}{tg\,\alpha - f_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{u}}\right) g'$$

und wenn man die Variablen sondernd, beiderseits integrirt

$$3)\quad v + u\,\frac{f_0 - f_1}{tg\,\alpha - f_1}\; Ln.\left(1 + \frac{tg\,\alpha - f_1}{tg\,\alpha - f_0} \cdot \frac{v}{u}\right) = g't$$

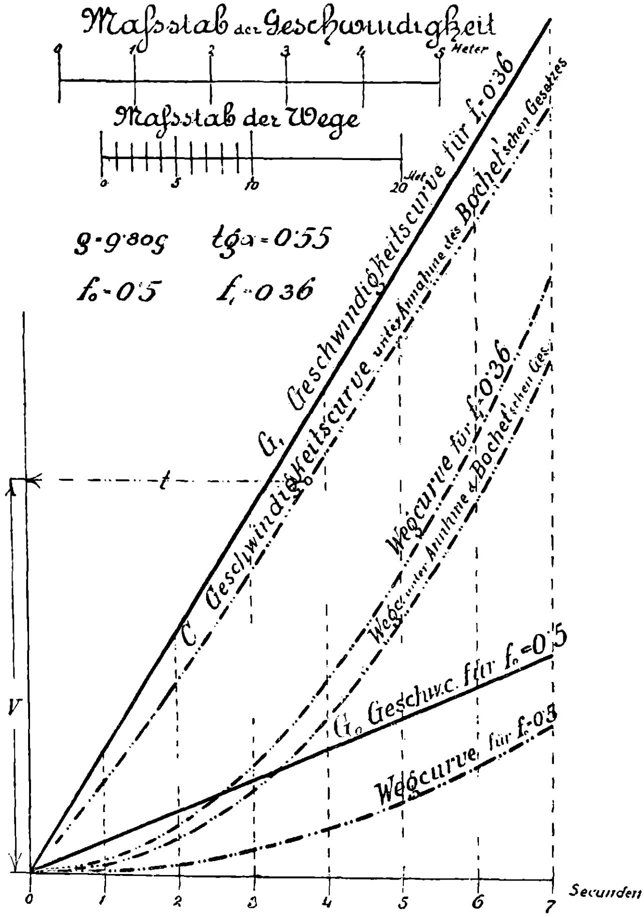

Fig. 1

Es ist unmöglich v direct durch eine geschlossene Function von t auszudrücken, damit stösst aber die Ermittlung des vom Körper in der Zeit t zurückgelegten Weges auf Schwierigkeiten. Um zu einem Resultate zu gelangen, das für praktische Zwecke vollständig ausreicht, stellen wir die Funktion

$$t = f\,(v)$$

graphisch dar, indem wir v als unabhängig veränderlich betrachten. Fig. 1 zeigt als Beispiel eine für specielle Annahmen gezeichnete Curve C.

Besonderes Interesse gewährt die Beziehung, in welcher die beiden Geraden

$$G_1 \ldots v = g\,(sin\ \alpha - f_1\ cos\ \alpha)\ t$$
$$G_0 \ldots v = g\,(sin\ \alpha - f_0\ cos\ \alpha)\ t$$

zu C stehen. Die Ordinaten von G_1 geben die den Abscissen als Zeiten entsprechenden Endgeschwindigkeiten unter Annahme eines constanten Reibungscoefficienten f_1, die von G_2 jene für den unveränderlichen Werth f_0.

Zunächst bemerkt man, dass die Richtung der Tangente eines Punktes (v, t) bestimmt ist durch:

$$\frac{dv}{dt} = g\,(sin\ \alpha - f_v\ cos\ \alpha)$$

für $v = \infty$ wird:

$$\frac{dv}{dt} = g\,(sin\ \alpha - f_1\ cos\ \alpha)$$

das heisst, die Tangente des unendlich fernen Punktes ist zu G_1 parallel; für $v = o$ wird:

$$\frac{dv}{dt} = g\,(sin\ \alpha - f_0\ cos\ \alpha),$$

was uns besagt, dass G_0 Tangente im Ursprung sei.

Kennt man aber die Geschwindigkeitscurve, so ist es leicht nach den Regeln des graphischen Rechnens die Summencurve zu construiren, deren Ordinate den Inhalt der zwischen der Abscissenaxe der Geschwindigkeitscurve und der Ordinate liegenden Fläche, mithin den Werth des Integrals $\int_0^t vdt$, das ist direct den in der Zeit t zurückgelegten Weg angibt.

In Fig. 1 sind diese Summencurven als strichpunktirte Linien eingezeichnet. Die daselbst versinnlichten Werthe entsprechen der Annahme, dass man es mit einer Riese vom Gefälle $tg\ \alpha = 0{\cdot}55$ zu thun habe, dass der Reibungscoefficient für sehr rasche Bewegung $f_1 = 0{\cdot}36$, jener für die Ruhe $f_0 = 0{\cdot}5$ sei und dass man in der Formel für das Reibungsgesetz übereinstimmend mit Bochet $\frac{1}{u} = 0{\cdot}3$ setzen dürfe.

Die Gleichung der Geschwindigkeitscurve wird dann

$$0{\cdot}612\ v + 0{\cdot}654\ lg\ (1 + 1{\cdot}14\ v) = t$$

construirt man hiernach die Summencurve, so findet man z. B. für den in der Zeit t zurückgelegten Weg s

$t =$	0	4	9	Secunden
$s =$	0	10·5	34·5	Meter.

Nehmen wir nun an, man hätte die beiden letzteren Werthe in praxi beobachtet und würde aus beiden nach der einfachen Formel für die Bewegung unter Annahme eines constanten Reibungscoefficienten, wie diess auch von Petraschek geschehen, berechnen, so fände man für

$t =$	4	9	Secunden
$f =$	0·40	0·39	

Man ersieht hieraus, dass der so berechnete Coefficient mit wachsender Zeit abnimmt, was uns ziffermässig die Eingangs gemachte Erörterung erklären könnte.

Der der Bewegung entgegenwirkende Luftdruck ist nahezu gegeben durch

$$\lambda v^2 S$$

wenn v die Geschwindigkeit des fallenden Körpers, S den Inhalt seiner bei der Bewegung voraneilenden Stirnfläche, λ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet.

Für Meter und Kilogramm ist nahezu

$$\lambda = 0{\cdot}122$$

ist l die Länge des fallenden Holzkörpers, γ sein specifisches Gewicht, so ist die Masse des Bewegten bei cylindrischer Form

$$\frac{\gamma S l}{g}$$

mithin, die durch den Luftwiderstand erzeugte Beschleunigung g'

$$g' = \frac{\lambda v^2}{\gamma l} \cdot g = \varkappa v^2 g$$

wobei $\varkappa$ eine Hilfsgrösse. Und wenn man für lufttrockenes Nadelholz $\gamma = 453$ Kilogr. pr. Cubikmeter setzt

$$g' = 0{\cdot}00027 \frac{v^2}{l} \cdot g$$

oder wenn man für nasses Holz $\gamma = 839$ Kilogr. pr. Cubikmeter einführt

$$g' = 0{\cdot}000145 \frac{v^2}{l} g$$

Mit Rücksicht auf den Luftwiderstand wird aus Gleichung 2)

$$g'' = (\sin \alpha - f_v \cos \alpha - \varkappa v^2)\, g$$

Fragen wir uns zunächst nach dem Neigungswinkel, für welchen die Fallgeschwindigkeit constant bleibt, so muss $g'' = 0$ werden und die Auflösung der Gleichung gibt:

$$tg\,\alpha = \frac{f_v + \varkappa v^2 \sqrt{1 + f_v^2 - \varkappa^2 v^4}}{l - \varkappa^2 v^4}$$

oder mit Rücksicht auf die Kleinheit des Gliedes $\varkappa v^2$ in den hier praktisch vorkommenden Fällen

$$4)\quad tg\,\alpha = f_v + \varkappa v^2 \sqrt{1 + f_v^2}$$

für lufttrockenes Holz ist

$$\varkappa = \frac{0{\cdot}00027}{l}.$$

Setzen wird ferner $v = 10$ M. und $f_v = 0{\cdot}38$, so wird für:

Scheitlänge	1	2	3 Meter
$tg\,\alpha$ =	0·41	0·395	0·39

Man sieht hieraus, dass $tg\,\alpha$ mit zunehmender Länge des bewegten Körpers abnimmt.

Petraschek's Coefficienten, ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand entwickelt, schliessen diesen gewissermassen in sich ein, und bestätigen ganz auffallend das eben entwickelte Gesetz, indem der Reibungscoefficient für Stämme stets kleiner als jener für Dreilinge und Scheiter ist, eine Erscheinung deren Ursache mithin wahrscheinlich neben anderem auch dem auftretenden Luftwiderstande zuzuschreiben sein dürfte.

Betrachten wir ferner die Verhältnisse unter der Annahme, dass f constant sei, so wird für

$$(\sin\alpha - f\cos\alpha)\, g = g'$$

wenn man ferner

$$\varkappa \frac{g}{g'} = \frac{1}{w^2}$$

setzt

$$g'' = \frac{dv}{dt} = g' \left(1 - \frac{v^2}{w^2}\right)$$

die bekannte ballistische Gleichung. Man erhält

$$5)\quad v = w \frac{e^{\frac{2g't}{w}} - 1}{e^{\frac{2g't}{w}} + 1}$$

und

$$6)\quad s = \frac{w^2}{2g'}\, Ln. \frac{\left(1 + e^{\frac{2g't}{w}}\right)^2}{4e^{\frac{2g't}{w}}}$$

als Formeln, welche gestatten, direct die Werthe von s und v zu berechnen.

Um den Einfluss des Widerstandes an einem Beispiele näher kennen zu lernen, nehmen wir an, dass man es mit einer Eisriese zu thun habe, die unter 7^0 gegen den Horizont geneigt ist, es gilt dann nach Petraschek für Dreilinge $f = 0{\cdot}10$. Ausserdem wollen wir $l = 3$ mithin $\varkappa = 0{\cdot}00009$ setzen. Die Berechnung liefert für

	$t =$	15	30	45	Secunden
v ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand	=	3·33	6·65	9·98	Meter
v mit "	=	3·27	6·32	8·85	
s ohne	=	25·0	99·8	224·6	
s mit "	=	24·9	97·1	211·5	

Man sieht hieraus, dass der Einfluss auf die Länge des zurückgelegten Weges immerhin ein beträchtlicher werden kann.

Nehmen wir wieder an, man habe die durch Rechnung erhaltenen Resultate für den mit Rücksicht auf den Luftwiderstand ermittelten Weg durch Beobachtung erhalten und würde aus diesen Daten unter Annahme eines constanten Reibungscoefficienten den Werth desselben berechnen, so erhielte man für:

$t =$	0	15	30	45	Secunden
$f =$	0·1	0·1000	0·1005	0·1013	

man sieht hieraus, dass f mit wachsender Zeit zunimmt.

Die Ermittlung der Ausdrücke für s und v unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Bochet'schen Gesetzes für die Variabilität des Reibungscoefficienten und des Einflusses, welcher vom Luftwiderstande ausgeübt wird, stösst auf Schwierigkeiten. Das Problem vereinfacht sich bedeutend, wenn man innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen der Veränderlichkeit des Reibungscoefficienten so Rechnung trägt, dass man

$$8)\quad f_v = (1 - \rho v^2)\, f_0$$

oder aber auch

$$9)\quad f_v = \alpha + bv$$

setzt, und hiebei die Constanten ρ beziehungsweise a und b, so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den für den gegebenen Fall beobachteten [1]) und berechneten Werthe ein Minimum wird, um hiedurch die wahrscheinlichsten Werthe derselben zu gewinnen.

Unter Annahme von 8 hat man

$$g'' = (\sin\alpha - f_0 \cos\alpha + f_0\, \rho v^2 \cos\alpha - \varkappa v^2)\, g$$

Bezeichnet man mit $\frac{1}{w_1{}^2}$ den Ausdruck $f_0\, \rho \cos\alpha - \varkappa$, so hat man unter Aufrechterhaltung des Werthes g' wie früher

$$g'' = \frac{dv}{dt} = g'\left(1 + \frac{v^2}{w_1{}^2}\right)$$

und man erhält

$$v = w_1\, tg\, \frac{g't}{w_1}$$

ferner

$$s = -\frac{w_1{}^2}{g'}\, Ln.\, \cos\frac{g't}{w_1}$$

Auch unter Annahme 9 ist der Ausdruck direct integrable.

Es liegt uns ferne, die in dem Aufsatze erörterten Formeln für die Anwendung in der Praxis zu empfehlen.

Die unter Annahme eines constanten Coefficienten giltigen Gesetze reichen innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen vollständig aus.

Aufgabe dieser Zeilen war es, gewisse Erscheinungen vom theoretischen Standpunkte aus zu beleuchten und über die Grösse des Einflusses bestimmter Widerstände sich klar zu werden. Sollten sie weitere Anregung zu den von Petraschek versprochenen Versuchen bieten, die gewiss werthvolle Beiträge für die Kenntniss der in den Formeln auftretenden Constanten über das Abhängigkeitsgesetz der Reibung etc. liefern werden, so ist ihr Zweck erfüllt.

---

[1]) Derartige Beobachtungen liessen sich vielleicht am besten in der Weise anstellen, dass man Hölzer auf einer horizontalen Riesstrecke mit verschiedenen Geschwindigkeiten führt, die man durch die Drehung einer Welle erzeugt, um die sich das ziehende Seil schlingt, und mittelst eines in der Zugvorrichtung eingeschalteten Dynamometers die aufzuwendende Kraft misst.